5.1
f, g, h のそれぞれの双対関数を f^d, g^d, h^d とする.

・f について

$f = xy$
$f^d = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = x \vee y$
$f \neq f^d$ なので, f は自己双対でない.

・g について

$g = \bar{x}$
$g^d = \bar{\bar{\bar{x}}} = \bar{x}$
$g = g^d$ なので, g は自己双対である.

・h について

$h = xyz \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z$
$h^d = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$
$h = h^d$ なので, h は自己双対である.

5.2
f^d の定義より

$$((f^d)^d = (\overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n))^d = \overline{\overline{f}}(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_n) = f$$

となる.

5.3
f の双対関数 f^d は

$$f^d = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

と表現できる. h の双対関数 h^d は

$$\begin{aligned}
h^d &= (\bar{x}_{n+1} f^d \vee x_{n+1} f)^d \\
&= (\bar{x}_{n+1} \vee f(x_1, x_2, ..., x_n)) \cdot (x_{n+1} \vee \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)) \\
&= x_{n+1} \cdot \bar{x}_{n+1} \vee x_{n+1} f(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \bar{x}_{n+1} \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \vee f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \\
&= x_{n+1} f(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \bar{x}_{n+1} f^d(x_1, x_2, ..., x_n) \vee f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot f^d(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}$$

ここで, h^d を x_{n+1} についてシャノン展開すると

$$\begin{aligned}
h^d &= x_{n+1} f(x_1, x_2, ..., x_n) f^d(x_1, x_2, ..., x_n) \vee 1 \vee \bar{x}_{n+1} f^d(x_1, x_2, ..., x_n) f(x_1, x_2, ..., x_n) \vee 1 \\
&= x_{n+1} f(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \bar{x}_{n+1} f^d(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&= h
\end{aligned}$$

よって, h は自己双対関数である.

5.4
n 変数の自己双対関数で, $f_0 = \overline{f_{2^n-1}}, f_1 = \overline{f_{2^n-2}}, \ldots, f_{2^{n-1}-1} = \overline{f_{2^{n-1}}}$ が成り立つ.

したがって, $f_0, f_1, \ldots, f_{2^{n-1}-1}$ の値が決まれば f 全体の値が決まる. よって n 変数の自己双対関数は $2^{2^{n-1}}$ 個存在する.

5.5

表 1: 3 変数の自己双対関数の真理値表

$x\ y\ z$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0 0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0 1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0 1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1 0 0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1 0 1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1 1 0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

表 1 の真理値表より, 真に 3 変数の自己双対関数は以下の $f_2, f_3, f_5, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{14}, f_{15}$ である.

$$
\begin{aligned}
f_2 &= \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz = xy \vee yz \vee zx \\
f_3 &= \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz = xy \vee y\bar{z} \vee \bar{z}x \\
f_5 &= \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz = x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee zx \\
f_7 &= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz = x \oplus y \oplus z \\
f_8 &= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz = \bar{x}y \vee yz \vee z\bar{x} \\
f_9 &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} = x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}x \\
f_{10} &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} = \bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z} \\
f_{12} &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} = \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee \bar{z}\bar{x} \\
f_{14} &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee z\bar{x} \\
f_{15} &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{x}
\end{aligned}
$$

5.6
以下の恒等式を証明する.

(i) $(f_0 \vee f_1 \vee \cdots \vee f_n)^d = (f_0^d f_1^d \cdots f_n^d)$

$$
\begin{aligned}
(f_0 \vee f_1 \vee \cdots \vee f_n)^d &= \overline{f_0(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) \vee f_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) \vee \cdots \vee f_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)} \\
&= \bar{f}_0(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)\bar{f}_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) \cdots \bar{f}_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) \\
&= f_0^d f_1^d \cdots f_n^d
\end{aligned}
$$

(ii) $(f_0 f_1 \cdots f_n)^d = f_0^d \vee f_1^d \vee \cdots \vee f_n^d$ も (i) と同様に証明できる.

(iii) $(\bar{f})^d = \overline{(f^d)}$

$$
\bar{f}(x_1, \ldots, x_n)^d = \overline{\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}
$$

$$= \overline{(f^d)}$$

(iv) $(x_i)^d = x_i (i = 1, 2, \ldots, n), (y_j)^d = y_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ は双対の定義より明らかである．したがって, 与えられた回路 F に対して, 出力から入力になるまで AND と OR の交換を繰り返すと f の双対関数を求めることができる．

5.7

以下の二つを証明する．但し, 手順 1 で求める f^d の最小論理和形を F_d, 手順 1 と手順 2 によって得られる論理式を F とする．

1. F は f を表現する．
2. F は最小論理積形である．

(1) 論理式の全ての論理和と論理積を入れ換えることでその双対関数が求まる．よって, f^d の全ての論理和と論理積を入れ換えることは, f^d の双対関数を求めることである．つまり $(f^d)^d = f$ なので, F は f を表現する．

(2) 命題 P を「F は最小論理積形である」とする．この命題を背理法で証明する．
「F は最小論理積形でない」と仮定する．すると, F より和項の少ない論理積形 F' が存在することになる．F' の論理和と論理積を入れ換えることで F'_d を得ることができる．このとき, F' は F よりも和項が少ないので, F'_d の積項も F_d より少ない．しかし, F_d は最小論理和形なので, これは矛盾する．よって仮定は偽であり, 命題 P は真である．

5.8

NAND は AND と NOT で構成されていると考えれば, 5.6 の結果より f の AND を OR に置き換える, すなわち f の NAND を NOR に置き換えれば, f の双対関数 f^d を実現することは明らかである．したがって, f^d がパリティ関数かどうかを調べれば良い．
ここで, $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ とすると

$$\begin{aligned} f^d &= \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \\ &= (x_1 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 1) \oplus \cdots \oplus (x_n \oplus 1) \oplus 1 \\ &= f \qquad (n: \text{ 奇数}) \\ &= f \oplus 1 \quad (n: \text{ 偶数}) \end{aligned}$$

入力変数が偶数個の場合 $f^d = \bar{f} \Rightarrow$ パリティ関数を実現しない
入力変数が奇数個の場合 $f^d = f \Rightarrow$ パリティ関数を実現する
といえる．

5.9

題意より, $f(x,1) \geq f(x,0)$ であるから $f(x,1) \vee f(x,0) = f(x,1)$,
同様に $f(1,y) \geq f(0,y)$ であるから $f(1,y) \vee f(0,y) = f(1,y)$ である．

これを用いて, シャノンの展開定理より, 以下のように展開できる.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xf(1,y) \vee \bar{x}f(0,y) \\ &= x(f(1,y) \vee f(0,y)) \vee \bar{x}f(0,y) \\ &= xf(1,y) \vee (x \vee \bar{x})f(0,y) \\ &= xf(1,y) \vee f(0,y) \end{aligned}$$

さらにシャノンの展開定理を用いて,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\{yf(1,1) \vee \bar{y}f(1,0)\} \vee \{yf(0,1) \vee \bar{y}f(0,0)\} \\ &= xyf(1,1) \vee x\bar{y}f(1,0) \vee y(0,1) \vee \bar{y}f(0,0) \\ &= xy\{f(1,1) \vee f(1,0)\} \vee x\bar{y}f(1,0) \vee y\{f(0,1) \vee f(0,0)\} \vee \bar{y}f(0,0) \\ &= xyf(1,1) \vee x(y \vee \bar{y})f(1,0) \vee yf(0,1) \vee (y \vee \bar{y})f(0,0) \\ &= xyf(1,1) \vee xf(1,0) \vee yf(0,1) \vee f(0,0) \end{aligned}$$

を得る.

5.10

n 変数単調増大関数の任意の主項を $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}$ $(0 < j \leq n)$ とすると, 主項 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}$ は最小項 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}\bar{x}_{i'_i}\bar{x}_{i'_2}\cdots\bar{x}_{i'_{n-j'}}$ (ただし, $0 \leq i' < n$, $i' \neq i_j$) を含む. 主項 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}$ が必須主項でないとすると, 最小項 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}\bar{x}_{i'_i}\cdot\bar{x}_{i'_2}\bar{x}_{i'_{n-j'}}$ を含む主項が他に存在しなければならない. 最小項 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}\bar{x}_{i'_i}\bar{x}_{i'_2}\cdots\bar{x}_{i'_{n-j'}}$ を含む積項はリテラル $x_{i_1},\cdots,x_{i_j},\bar{x}_{i'_i},\ldots,\bar{x}_{i'_{n-j'}}$ の積によって表すことができる. ここで, f は単調増大関数なので, 主項に否定リテラルを含むことはできず, 正リテラルのみの積項となる. 正リテラルの積をとって得られる積項で, リテラル数が j より多いものは主項 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}$ に包含されるため主項にならず, また, リテラル数が j より少ないものは主項 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}$ を包含するため存在しない. よって, 最小項 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}\bar{x}_{i'_i}\bar{x}_{i'_2}\cdots\bar{x}_{i'_{n-j'}}$ を含む主項は他に存在しない. したがって, この主項は必須主項である. また, すべての主項が必須主項であるので最小論理和形は一意に定まる.

5.11

n 変数関数で, $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の正リテラルから成る積項で表現される関数を考える. これは明らかに単調増大関数である.
$\lfloor n/2 \rfloor$ 個の正リテラルから成る積項の数は ${}_nC_{\lfloor n/2 \rfloor}$ 個である.

5.10 より, $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の正リテラルから成る積項で表現される関数では, これらの積項はすべて主項であり, かつ必須主項になる. よって, これらの積項の組み合わせによる関数はすべて異なる関数となり, その個数は $2^{{}_nC_{\lfloor n/2 \rfloor}}$ 個である.

よって n 変数単調増大関数は少なくとも $2^{{}_nC_{\lfloor n/2 \rfloor}}$ 個以上存在する.

5.12

f を変形すると

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}y \vee \bar{y} \vee xz \\ &= (\bar{x} \vee \bar{y}) \cdot (y \vee \bar{y}) \vee xz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{x} \vee \bar{y} \vee xz \\
&= \bar{x} \vee xz \vee \bar{y} \\
&= (\bar{x} \vee x) \cdot (\bar{x} \vee z) \vee \bar{y} \\
&= \bar{x} \vee z \vee \bar{y}
\end{aligned}
$$

を得る．したがって f はユネイト関数である．
g を変形すると

$$
\begin{aligned}
g &= x\bar{y} \vee y \\
&= (x \vee y) \cdot (\bar{y} \vee y) \\
&= x \vee y
\end{aligned}
$$

を得る．したがって g はユネイト関数である．
h を変形すると

$$
\begin{aligned}
h &= x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z \vee w \\
&= \bar{y} \cdot (x\bar{z} \vee z) \vee w \\
&= \bar{y} \cdot (x \vee z) \vee w
\end{aligned}
$$

を得る．したがって h はユネイト関数である．

5.13
n 変数パリティ関数 f は

$$f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \cdots \oplus x_n$$

で表され, 1 の値をとる入力変数の個数が奇数個のときのみ $f(\boldsymbol{a}) = 1$ となる．
真理値表より $n = 1$ のとき 1 個 ($2^{1-1} = 1$), $n = 2$ のとき 2 個 ($2^{2-1} = 2$), $n = 3$ のとき 4 個 ($2^{3-1} = 4$), $n = 4$ のとき 8 個 ($2^{4-1} = 8$) となり, f を n 変数パリティ関数とするとき, $f(\boldsymbol{a}) = 1$ となる最小項の個数は 2^{n-1} である．

表 2: $n = 1$

x_1	f
0	0
1	1

表 3: $n = 2$

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 4: $n = 3$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

表 5: $n = 4$

x_1	x_2	x_3	x_4	f	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0

5.14

$$f(y, x) = (y \vee \bar{x})(\bar{y} \vee x)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\bar{y} \vee x)(y \vee \bar{x}) \\
&= (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y) \\
&= f(x,y)
\end{aligned}
$$

したがって f は対称関数である.

$$
\begin{aligned}
g(x,y,z) &= xy \vee yz \vee zx \\
g(x,z,y) &= xz \vee zy \vee yx = xy \vee yz \vee zx = g(x,y,z) \\
g(y,x,z) &= yx \vee xz \vee zy = xy \vee yz \vee zx = g(x,y,z) \\
g(y,z,x) &= yz \vee zx \vee xy = xy \vee yz \vee zx = g(x,y,z) \\
g(z,x,y) &= zx \vee xy \vee yz = xy \vee yz \vee zx = g(x,y,z) \\
g(z,y,x) &= zy \vee yx \vee xz = xy \vee yz \vee zx = g(x,y,z)
\end{aligned}
$$

したがって g は対称関数である.
$xy = xy \vee xyz$(吸収律) を用いると

$$
\begin{aligned}
h &= xy \vee x\bar{y}z \vee xyz \vee \bar{x}yz \vee xyz \\
&= xy \vee xz \vee yz
\end{aligned}
$$

したがって $g(x,y,z)$ の結果から h は対称関数である.

5.15
3 変数の対称関数を f とすると, $f = b_0S_0^3 \vee b_1S_1^3 \vee b_2S_2^3 \vee b_3S_3^3 (b \in \{0,1\})$ で表される.
これより以下の 16 個の関数が存在する.

$S_{\phi}^3 = 0$
$S_{\{0\}}^3 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$S_{\{1\}}^3 = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$
$S_{\{2\}}^3 = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$
$S_{\{3\}}^3 = xyz$
$S_{\{0,1\}}^3 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z}\bar{x} \vee \bar{z}\bar{y}$
$S_{\{0,2\}}^3 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$
$S_{\{0,3\}}^3 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz$
$S_{\{1,2\}}^3 = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} = \bar{x}z \vee y\bar{z} \vee \bar{y}$
$S_{\{1,3\}}^3 = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz$
$S_{\{2,3\}}^3 = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz = xz \vee xy \vee yz$
$S_{\{0,1,2\}}^3 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \vee y\bar{z} \vee \bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
$S_{\{0,1,3\}}^3 = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z}\bar{x} \vee \bar{z}\bar{y} \vee xyz$
$S_{\{1,2,3\}}^3 = \bar{x}z \vee y\bar{z} \vee \bar{y} \vee xyz = x \vee y \vee z$
$S_{\{0,2,3\}}^3 = \bar{x}z \vee y\bar{z} \vee \bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$S_{\{0,1,2,3\}}^3 = x \vee y \vee z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = 1$

5.16
n 変数対称関数は, 基本対称関数を用いて次式で表すことができる.

$$S_A^n = \bigvee_{i=0}^{n} b_i S_i^n$$
$$\text{ただし}, A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}, \quad b_i \in \{0, 1\}$$

A の要素の決めかたは 0 から n までの $n+1$ 個の各要素をとる・とらないの 2 通りあるので, 異なる A は 2^{n+1} 個存在する. したがって n 変数の対称関数は 2^{n+1} 個存在する.

5.17
n 変数の基本対称関数 S_i^n は, n 個の入力の内, ちょうど i 個の入力が 1 のときのみ値が 1 となるような関数である. 3 つの入力 x, y, z のうち, 1 の入力の個数が 0, 1 個のときは f=0, また, 2, 3 個のときは $f = 1$ である. よって, $f = S_{\{2,3\}}^3$ である.

5.18
n 変数対称関数は

$$S_A^n = \bigvee_{i=0}^{n} b_i S_i^n$$
$$\text{ただし}, A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}, \quad b_i \in \{0, 1\}$$

と定義すると,

$$S_\phi^n = 0, S_{\{0,1,\ldots,n\}}^n = 1$$

であり, これらの関数は単調増大関数である.
また, n 個の異なる肯定リテラルを用いて関数 f を表したとき, AND のみで表すことができる単調増大な関数 f は

$$f = x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} x_n$$

のみである.
ここで n 個の肯定リテラルを用い論理和形で関数 f を表したとき, 各積項のリテラル数が

$$\begin{aligned}
1\,\text{個} \quad &\rightarrow \quad f = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n \\
2\,\text{個} \quad &\rightarrow \quad f = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee \cdots \vee x_{n-1} x_n \\
&\vdots \\
n-1\,\text{個} \quad &\rightarrow \quad f = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \vee x_1 x_2 \cdots x_{n-2} x_n \vee \cdots \vee x_2 x_3 \cdots x_{n-1} x_n
\end{aligned}$$

なので, 単調増大な関数 f が $n-1$ 個存在する.
したがって, n 変数対称関数のうちで, 単調増大な関数は $1+1+1+n-1 = n+2$ 個存在する.

5.19
n 変数対称関数は, 基本対称関数を用いて次のように表現できる.

$$S_A^n = \bigvee_{i=0}^{n} b_i S_i^n$$
$$\text{ただし}, A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}, \quad b_i \in \{0, 1\}\ \text{である}.$$

題意より, n は奇数であるので, 基本対称関数の個数は偶数個である. また, n 変数の自己双対関数は, 最小項を $f_0, f_1, \ldots, f_{2^n-1}$ としたとき, $f_0 = \bar{f}_{2^n-1}$, $f_1 = \bar{f}_{2^n-2}$, … , $f_{2^{n-1}-1} = \bar{f}_{2^{n-1}}$ が成立する. よって, 自己双対な n 変数対称関数は

$$S_A^n = b_0 S_0^n \vee b_1 S_1^n \vee \cdots \vee b_{\frac{n-1}{2}} S_{\frac{n-1}{2}}^n \vee \bar{b}_{\frac{n-1}{2}} S_{\frac{n+1}{2}}^n \vee \cdots \vee \bar{b}_1 S_{n-1}^n \vee \bar{b}_0 S_n^n$$

と表現できる. したがって, 求める関数の個数は $b_0, b_1, \ldots, b_{\frac{n-1}{2}}$ の $\frac{n+1}{2}$ 個の数に割当てする方法に等しい. ゆえに, n が奇数のとき, 自己双対な n 変数対称関数は $2^{\frac{n+1}{2}}$ 個存在する.

5.20

まず, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, \ldots, x_n)$ より, 変数 x_1 と変数 x_2 を入れ換える操作を操作 1 とする.
次に, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$ より, 変数の順列を左回転シフトさせることを操作 2 とする.
また, 操作 2 を繰り返すと右回転シフトができるので, それを操作 3 とする.
以上の操作 1, 2, 3 を用いて
$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$
を示す. ただし, $0 \le i < j \le n$ とする.

(左辺)	=	$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$	
	=	$f(x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1})$	(操作 2 を $i-1$ 回適用)
	=	$f(x_{i+1}, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1})$	(操作 1 を適用)
	=	$f(x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1})$	(操作 2 を適用)
	=	$f(x_i, x_j, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1})$	(操作 1, 2 を繰り返し適用)
	=	$f(x_j, x_i, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1})$	(操作 1 を適用)
	=	$f(x_{j-1}, x_j, x_i, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-2})$	(操作 3 を適用)
	=	$f(x_j, x_{j-1}, x_i, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-2})$	(操作 1 を適用)
	=	$f(x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1})$	(操作 3, 1 を繰り返し適用)
	=	$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$	(操作 3 を $i-1$ 回適用)
	=	(右辺)	

よって,
$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$
より, 関数 f の変数を任意に置換することができる.
ゆえに, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$ のとき f は完全対称関数である.

5.21

関数 f の真理値表は表 6 のようになる. また, f のカルノー図は図 1 のようになる. 図 1(b) より

$$f = xy\bar{z} \vee x\bar{y}w \vee xz\bar{w} \vee y\bar{z}w \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}zw$$

が求まり, ゲート数最小の AND-OR 二段回路は図 2 のようになる.

5.22

$S_{\{0,1,\ldots,n-2\}}^n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とする.

表 6: 真理値表

x	y	z	w	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

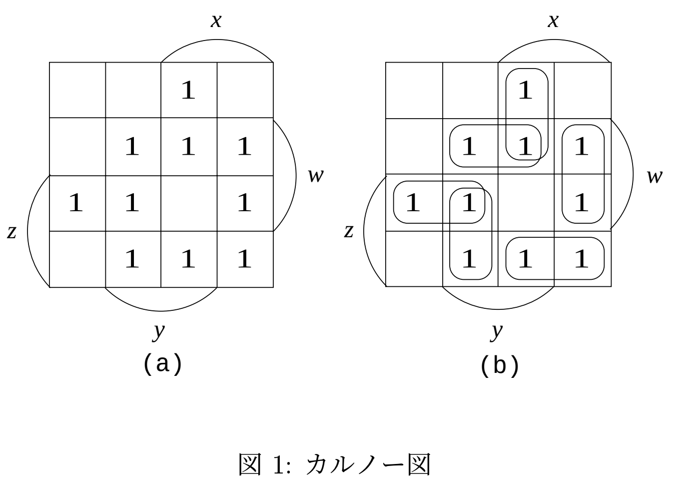


図 1: カルノー図

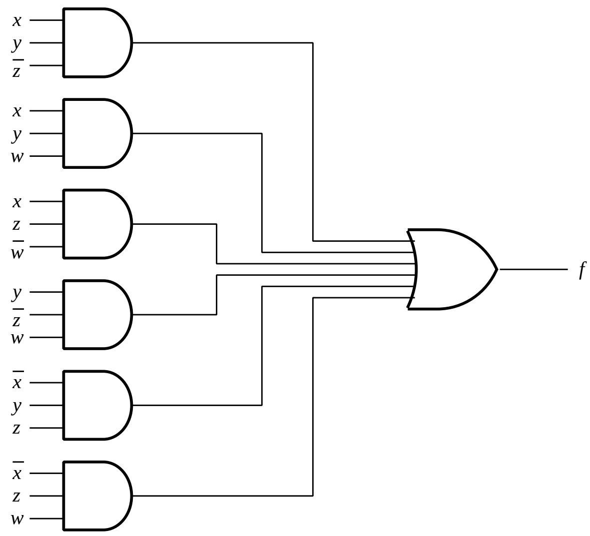


図 2: AND-OR 二段回路

題意より, この関数は最小項 $x_1x_2\cdots x_n$ 及びこの最小項に隣接する最小項の値が 0 となり, その他の入力では $f=1$ となる関数である. 図 3 に 4 変数のカルノー図を示す. 図 3 を見ると, 最小論理和形の積項の数は 6 であり, $n=4$ の場合は確かに $n(n-1)/2$ 個の積項を含んでいる.
次に, $n>4$ の場合を考える. ここで, 最小項 $x_1x_2\cdots x_n$ からのハミング距離が 2 である最小項を 2 個以上同時に包含する積項は存在しない. また, 最小項 $x_1x_2\cdots x_n$ からのハミング距離が 2 である事を考えると, この最小項の個数は, ${}_nC_2$ 個である. よって関数 $S^n_{\{0,1,\ldots,n-2\}}$ は少なくとも ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ の積項を含む.
ゆえに, 関数 $S^n_{\{0,1,\ldots,n-2\}}, n \geq 4$ の最小論理和形は少なくとも $n(n-1)/2$ 個の積項を含む.

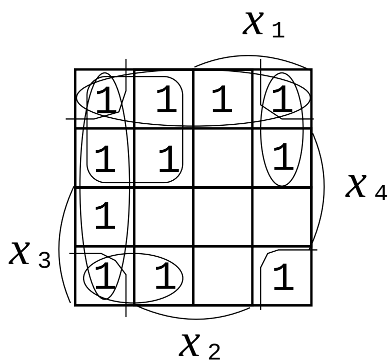


図 3: 4 変数のカルノー図

5.23

$S^{3m}_{\{m,m+1,\ldots,2m\}}$ の主項の個数は, $(3m)!/(m!)^3$ となることを示す.

$S^{3m}_{\{m,m+1,\ldots,2m\}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_{3m})$ とする.
また, 最小項 $x_1x_2\cdots x_{3m}$ を最小項 c_0 とする.
この関数は, 最小項 c_0 からのハミング距離が $m-1$ 以下である全ての最小項の値が 0 であり, 最小項 c_0 からのハミング距離が m 以上 $2m$ 以下である全ての最小項の値が 1, 最小項 c_0 からのハミング距離が $2m+1$ 以上 $3m$ 以下である全ての最小項の値が 0 となるような関数である.
よって, 最小項 $x_1x_2\cdots x_{3m}$ からのハミング距離が m である最小項 2 個以上を同時に包含する積項は存在しない. また, 最小項 $x_1x_2\cdots x_{3m}$ からのハミング距離が m である事を考えると, この最小項の個数は, ${}_{3m}C_m$ 個である.
また, この ${}_{3m}C_m$ 個の最小項の内の一つの最小項を $c_{m_i} (1 \leq i \leq {}_{3m}C_m)$ とする.
最小項 c_{m_i} を考える. 最小項 c_{m_i} は最小項 c_0 からのハミング距離が m であることを考えると, $3m$ 個の変数のうち m 個の変数のリテラルを否定して得ることのできる最小項である.
また, 最小項 c_0 からのハミング距離が $2m$ であり, かつ最小項 c_{m_i} からのハミング距離が m である最小項を 2 個以上同時に包含する積項は存在しない. 最小項 c_0 からのハミング距離が $2m$ であり, かつ最小項 c_{m_i} からのハミング距離が m である最小項の内の一つを c_{2m} とする. よって, c_{m_i} を含み, かつ c_{2m} を含む項が c_{m_i} の主項となる. また, その数は残った $2m$ 個の変数のうち m 個を選び, 選んだ変数のリテラルを否定する場合の数であるので, ${}_{2m}C_m$ 個となる.
c_{m_i} 以外の最小項も同様であるので, よって, ${}_{3m}C_m$ 個の最小項それぞれに対し, ${}_{2m}C_m$ 個の主項を持っていることになる.
ここで, ${}_{3m}C_m \times {}_{2m}C_m = (3m)!/(m!)^3$ であるので,
よって, $S^{3m}_{\{m,m+1,\ldots,2m\}}$ の主項の個数は, $(3m)!/(m!)^3$ となる.

上で求めたように, 最小項 $x_1x_2\cdots x_{3m}$ からのハミング距離が m である最小項を 2 個以上同時に包含する積項は存在しない. また, 最小項 $x_1x_2\cdots x_{3m}$ からのハミング距離が m である事を考えると, この最小項の個数は, ${}_{3m}C_m$ 個である.
ここで, ${}_{3m}C_m = (3m)!/(m!(2m!))$ であるので,
$S^{3m}_{\{m,m+1,\ldots,2m\}}$ の最小論理和形は少なくとも $(3m)!/(m!(2m!))$ 個の項を含む.

5.24

S^n_i の最小項は ${}_nC_i$ 個である. これらの最小項はハミング距離が 2 以上かつ, 必須主項であるから, 必須主項の数は ${}_nC_i$ 個存在する.

5.25

f がしきい関数ならば,

$$f'(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_jx_j + \cdots + w_nx_n \geq t \cdots (1) \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

を満たす実数 $w_1, w_2, \ldots, w_n$ が存在する.
ここで,

$$g = f \vee x_j \ (1 \leq j \leq n+1)$$

とすると,

(i) $x_j = 1$ のとき,

$$g = 1 \vee f = 1$$

(1) で, w_j を $w' = |w_1 + w_2 + \ldots + w_n| + t$ に置き換えると

$$w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w'_jx_j + \cdots + w_nx_n \geq t \cdots (1)'$$

これは $x_j = 1$ のとき, 常に成り立つ. よって

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w'_jx_j + \cdots + w_nx_n \geq t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

とすることができる.

(ii) $x_j = 0$ のとき,
(1)' で, $x_j = 0$ ならば, $w_jx_j = 0$ だから, (1)' は (1) と一致する.
よって

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w'_jx_j + \cdots + w_nx_n \geq t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

とすることができる.

(i)(ii) より

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w'_jx_j + \cdots + w_nx_n \geq t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

$w' = |w_1 + w_2 + \ldots + w_n| + t$ は実数だから, g はしきい関数である
f がしきい関数ならぼ $f \cdot x_j$ もしきい関数である証明

$g = f \cdot x_j$ として, g の否定をとると,

$$\bar{g} = \bar{x_j \cdot f} = \bar{x}_i \vee \bar{f}$$

ここで, u を任意のしきい関数とすると,

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \geq t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

より, $\bar{u}$ は,

$$\bar{u}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n < t \cdots (2) \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

ここで, (2) の両辺に -1 をかけると,

$$-w_1x_1 - w_2x_2 - \cdots - w_nx_n > -t \cdots (2)'$$

さらに, w_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ を $w'_i = -w_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ に,t を $t' = -(t + \alpha)$ ただし, $\alpha < |w_i|$ (w_i は $w_1, w_2, \cdots, w_n$ の中で絶対値最小のもの) とすると, (2)' は

$$w'_1x_1 + w'_2x_2 \cdots + w'_nx_n \geq t'$$

となる. w'_i, t' は実数だから, 任意のしきい関数 u の否定 $\bar{u}$ はしきい関数である. このことより, しきい関数 f の否定 $\bar{f}$ はしきい関数である.

上述したように, 任意のしきい関数とその変数の OR による関数もしきい関数となるので, $\bar{g}$ はしきい関数となる. よって $\bar{g}$ の否定 g もしきい関数である.

5.26

(i) しきい関数である.

(ii)

$$\begin{aligned} g &= x\bar{y} \vee \bar{x}y \\ &= x \oplus y \end{aligned}$$

となるのでしきい関数ではない.

(iii) しきい関数である.

(iv)

$$\begin{aligned} u &= xy \vee \bar{x}yz \\ &= y(x \vee \bar{x}z) \\ &= y(x \vee \bar{x})(x \vee z) \\ &= y(x \vee z) \\ &= xy \vee yz \end{aligned}$$

となり, しきい関数である.

(v)

$$\begin{aligned} v &= xy \vee \bar{x}\bar{y} \\ &= (x \vee \bar{x}\bar{y})(y \vee \bar{x}\bar{y}) \\ &= (x \vee \bar{y})(y \vee \bar{x}) \\ &= \overline{x \oplus y} \end{aligned}$$

したがってしきい関数ではない.

5.27
まず, f について考える.

$$f = \begin{cases} 1 & (2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

となる. f の真理値表を表 7 に, カルノー図を図 4 に示す.
以上より f は次のようになる.

$$f = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_3 = x_3(x_1 \vee \bar{x}_2)$$

表 7: f の真理値表

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

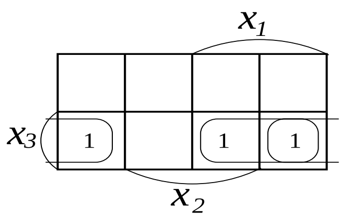


図 4: f のカルノー図

次に, g について考える.

$$g = \begin{cases} 1 & (x_1 - 4x_2 + 3x_3 \geq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

となる. g の真理値表を表 8 に, カルノー図を図 5 に示す.

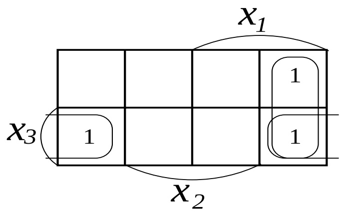


図 5: g のカルノー図

以上より g は次のようになる.

$$g = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_2(x_1 \vee x_3)$$

表 8: g の真理値表

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

5.28

f の変数 x_i について考える．しきい条件式より x_i の重み w_i について $w_i > 0$ ならば

$$f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n) \geq f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n)$$

が成立し, $\bar{x}_i$ を含まない論理式となり f は単調増大関数である．

5.29

f の双対関数は, 各変数 x_i を $\bar{x}_i$ で置き換えさらに関数全体の否定演算を行ったものである．
f の各変数 x_i を $\bar{x}_i$ で置き換えた関数 f' は

$$f'(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = \begin{cases} 1 & w_1\bar{x}_1 + w_2\bar{x}_2 + \cdots + w_n\bar{x}_n \geq t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

となる．さらにこの関数に否定演算を行った関数は

$$\begin{aligned} \bar{f}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) &= \begin{cases} 1 & w_1\bar{x}_1 + w_2\bar{x}_2 + \cdots + w_n\bar{x}_n < t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & -w_1\bar{x}_1 - w_2\bar{x}_2 - \cdots - w_n\bar{x}_n > -t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

となる．この関数は f の双対関数 f^d である．
ここで,

$$w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n - (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) = -w_1\bar{x}_1 - w_2\bar{x}_2 - \cdots - w_n\bar{x}_n$$

なので f の双対関数 f^d は

$$f^d = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n > -t + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

となる．ここで, 正の重みの中で最小の重みを w_{min} とすると f^d は

$$f^d = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \geq -t + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) + w_{min} \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

とかける．よって f^d は重みが $w_i(1 \geq i \geq n)$, 閾値が $-t + (w_1 + w_2 + \cdots w_n) + w_{min}$ のしきい関数である．

5.30

背理法を用いて証明する．
f をしきい関数と仮定する．このとき f は,

$$f = \begin{cases} 1 & w_1x + w_2y + w_3z + w_4w \geq t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

と表現可能である．これより, $(x, y, z, w) = (1, 1, 0, 0)$ のとき $w_1 + w_2 \geq t$, $(x, y, z, w) = (0, 0, 1, 1)$ のとき $w_3 + w_4 \geq t$ となる．よって, $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 2t$ となる．
同様に, $(x, y, z, w) = (1, 0, 1, 0)$ のとき $w_1 + w_3 < t$, $(x, y, z, w) = (0, 1, 0, 1)$ のとき $w_2 + w_4 < t$ となる．これらより $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 < 2t$ が導かれるが, これは f の条件に矛盾する．よって, 命題は成立する．

5.31
(a) 反例)$x_1 = 1, y_2 = 1$ それ以外が 0 のとき, 左辺 $= 0$, 右辺 $= 1$ となる.
(b) 反例)$x_1 = 1, y_1 = 1, y_2 = 1, z_1 = 1$, それ以外が 0 のとき, 左辺=1, 右辺=0 となる.

5.32
T_i は単調増大関数となる. これは 5.11 で考えた i 個の正リテラルから成る積項で表現される関数である. よって, その主項の個数は ${}_nC_i$ 個である. また, これらの主項はすべて必須主項であるから, 必須主項の個数も ${}_nC_i$ 個である.

5.33
n 変数多数決関数を最小論理和形で表したとき, m 個以下のリテラルからなる積項は存在しない. これにより, 全ての $m+1$ 個のリテラルからなる積項には, 部分項となる積項は存在しない. よって, これらの積項は全て主項となる. そして n 変数多数決関数は単調増大関数なので, これらの主項は全て必須主項である. また, $m+1$ 個より多いリテラルからなる積項には, 必ず部分項となる $m+1$ 個のリテラルからなる積項が存在する. よって, 吸収律により $m+1$ 個より多いリテラルからなる積項は全て消える.
結局, 最小論理和形は $m+1$ 個のリテラルからなる積項のみとなる. よって, 積項の個数は ${}_nC_{m+1} = {}_nC_m$ 個である.

5.34
$M(x \cdot y, z, w) = M(x, z, w) \cdot M(y, z, w)$ を証明する.
$M(x, y, z) = xy \oplus yz \oplus zx$ より,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (xy)z \oplus zw \oplus w(xy) \\
\text{右辺} &= (xz \oplus zw \oplus wx)(yz \oplus zw \oplus wy) \\
&= xyz \oplus xzw \oplus xyzw \oplus yzw \oplus zw \oplus yzw \oplus xyzw \oplus xzw \oplus xyw \\
&= xyz \oplus zw \oplus xyw = \text{左辺}.
\end{aligned}
$$

5.35
5.34(viv) より右辺の一部は

$$
\begin{aligned}
& M(M(x_1, x_3, x_4), x_5, M(x_2, x_3, x_4)) \\
=\; & M(M(x_1, x_2, x_5), x_3, x_4)
\end{aligned}
$$

と変形できる. したがって右辺を展開すると

$$
\begin{aligned}
& M(M(x_1, x_2, x_3), M(M(x_1, x_2, x_5), x_3, x_4), x_5) \\
=\; & M(M(x_1, x_2, x_3), M(x_1, x_2, x_5)x_3 \vee M(x_1, x_2, x_5)x_4 \vee x_3x_4, x_5) \\
=\; & M(x_3x_5, x_1, x_2)x_3 \vee M(x_3x_5, x_1, x_2)x_4 \vee M(x_1, x_2, x_3)x_3x_4 \\
& \vee x_5M(x_1, x_2, x_3) \vee M(x_1, x_2, x_5)x_3x_5 \vee M(x_1, x_2, x_5)x_4x_5 \\
& \vee x_3x_4x_5
\end{aligned}
$$

上式を展開して整理すると 5.35 の結果と一致する.

5.36

$f(x, y, z) = \bar{x}y \vee \bar{z}$

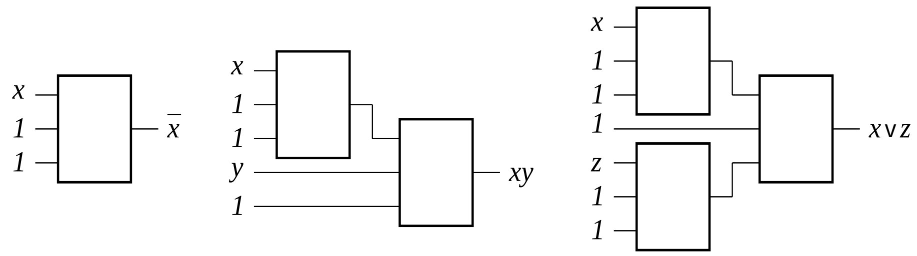
・NOT: $f(x, 1, 1) = \bar{x} \cdot 1 \vee 0 = \bar{x}$

・AND: $f(x, y, 1) = \bar{x}y \vee 0 = \bar{x}y$

$\quad f(f(x, 1, 1), y, 1) = \bar{\bar{x}}y = xy$

・OR: $f(x, 1, z) = \bar{x} \vee \bar{z}$

$\quad f(f(x, 1, 1), 1, f(z, 1, 1)) = x \vee z$



(a) NOT　(b) AND　(c) OR

図 6: AND, OR, NOT

5.37

$$f(x, x, x) = (\bar{x} \vee \bar{x})\bar{x} = \bar{x}$$

となるので, NOT が合成できた.

$$\begin{aligned} f(x, x, z) &= (\bar{x}\bar{z}) \vee (\bar{x}\bar{z}) \\ &= \bar{x}\bar{z} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} f(f(x, x, z), f(x, x, z), f(x, x, z)) &= \overline{\bar{x}\bar{z}} \\ &= x \vee z \end{aligned}$$

となるので, OR が合成できた. また,

$$f(f(x, x, x), f(x, x, x), f(z, z, z)) = xz$$

となり, AND が合成できた.

5.38

$y = z = 0$ とおくと

$$f(x, 0, 0) = \bar{x} \quad (NOT)$$

また, $y = 0$ とおくと

$$f(x, 0, z) = \bar{x} \cdot \bar{z}$$

これと NOT で AND が合成できる. また, $\overline{\bar{x}\bar{z}} = x \vee z$ より OR を合成できる.

5.39

$f(x, y) = x \oplus y, g(x, y, z) = xy \oplus yz \oplus zx$ とおくと

$$f(1, y) = 1 \oplus y = \bar{y}$$

となるので, 1 と f で NOT が合成できた.
g で, $z = 1$ とすると

$$\begin{aligned} g(x, y, 1) &= x \oplus y \oplus xy \\ &= x \vee y \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} g(x \oplus 1, y \oplus 1, 1) &= (x \oplus 1) \oplus (y \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1) \\ &= 1 \cdot 1 \oplus xy \\ &= \overline{xy} \end{aligned}$$

ここで上記で証明した NOT を用いると

$$\begin{aligned} g(f(1, x) \oplus 1, f(1, y) \oplus 1, 1) &= \overline{f(1, x) f(1, y)} \\ &= \overline{\bar{x}\bar{y}} \\ &= x \vee y \end{aligned}$$

となり, OR が合成できた. また,

$$\begin{aligned} f(1, g(x \oplus 1, y \oplus 1, 1)) &= \overline{\overline{xy}} \\ &= xy \end{aligned}$$

となり, AND が合成できた.

5.40

$f = x \oplus y \oplus z$, $g = xy \oplus yz \oplus zx$ とする.
・NOT: $f(x, y, 0) = x \oplus 0 \oplus 0 = \bar{x}$
・AND: $g(x, y, 0) = xy \oplus 0 \oplus 0 = xy$
・OR: $g(x, y, 1) = xy \oplus y \oplus x = x \vee y$

5.41

$f(0, 0, 0) = 0 \vee 1 = 1 \Rightarrow f$ は 0 保存関数ではない.
$f(1, 1, 1) = 1 \vee 0 = 1 \Rightarrow f$ は 1 保存関数である.

$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq f(x, y, z) \Rightarrow f$ は自己双対関数ではない.
また, f は非単調増大関数である.
f をリード・マラー展開するとき, 展開の途中で

$$\cdots \oplus xy\{f(0,0,0) \oplus f(1,0,0) \oplus f(0,1,0) \oplus (1,1,0)\} \oplus \cdots$$

となり, 少なくとも xy という 2 次以上の項が存在することになるので f は線形関数ではない.
以上より f を万能にするためには非 1 保存関数を加えればよい.

5.42
ゲートに定数 1 を加えると仮定する. $x = y = 1$ とすると

$$f = 1 \oplus z = \bar{z}$$

となり, NOT が合成できる. 次に, $z = 1$ とすると

$$f = xy \oplus 1 = \overline{xy}$$

これと NOT で AND が合成できる. また,

$$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

これと NOT で OR が合成できる. よって, ゲートに定数 1 を加えれば万能になる.

5.43
3 変数関数を NPN 同値類に分けたときの代表元をすべて示す.
$xy \vee yz \vee xz$
$x \oplus y \oplus z$
$x \vee y \vee z$
$x(y \vee z)$
$xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$\bar{x}yz \vee x\bar{y} \vee x\bar{z}$
$x(yz \vee \bar{y}\bar{z})$
$xy \vee yz \vee \bar{x}z$
$\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$
$x\bar{y}\bar{z} \vee yz$

5.44
NPN 同値類の場合, 同値な論理関数は, 入力変数の置換あるいは否定, 出力関数を否定することにより得られるため, $f^d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ は, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と NPN 同値である. したがって, NPN 同値関係では, 関数 f とその双対関数 f^d は同じ同値類に属する.

5.45

a) $xy \vee yz \vee zx$ で代表される NP 同値類
$f_1 = xy \vee yz \vee zx$

$f_2 = \bar{x}y \vee yz \vee z\bar{x}$
$f_3 = x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee zx$
$f_4 = xy \vee y\bar{z} \vee \bar{z}x$
$f_5 = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee z\bar{x}$
$f_6 = x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}x$
$f_7 = \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee \bar{z}\bar{x}$
$f_8 = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{x}$

b) $xy \vee yz \vee zx$ で代表される NPN 同値類
$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$

c) $x \oplus y \oplus z$ で代表される NP 同値類
$f_9 = x \oplus y \oplus z$
$f_{10} = \bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z}$

5.46
n 変数論理関数の最小項の個数は 2^n 個である．このうちの 2^{n-1} 個の最小項が 1 となる論理関数の個数は，${}_{2^n}C_{2^{n-1}}$ 個である．

5.47

$$\begin{aligned} S^3_{\{1,2\}} &= S^3_1 \vee S^3_2 \\ &= \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \end{aligned}$$

となる．BDD を図 7 に示す．

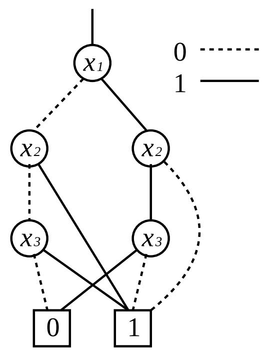


図 7: 5.48 の BDD

5.48
補題 5.1 から 5.6 の 6 つの補題を用いて定理 5.17 の十分性の証明をする．
$\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{M}_0$ より $\mathcal{F}$ は非 0 保存関数を要素として持つ．同様に，$\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{M}_1$ より $\mathcal{F}$ は非 1 保存関数も要素として持つ．ここで次の二つの場合に分けて考える．

1. $\mathcal{F}$ が非 1 保存かつ非 0 保存である関数 f を含む場合
   補題 5.4 より f から NOT が合成できる．また, $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{M}_2$ より非自己双対関数が存在する．よって補題 5.3 より定数 0 と 1 を合成できる．次に, $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{M}_4$ より非線形関数が存在するので補題 5.2 より AND と OR が合成できる．

2. $\mathcal{F}$ が非 1 保存かつ非 0 保存である関数を含まない場合
   $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{M}_0$ と $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{M}_1$ より 1 保存かつ非 0 保存関数 f_i と,0 保存かつ非 1 保存関数 f_j とが存在する．よって補題 5.5 と補題 5.6 より定数 1 と 0 が合成できる．また, $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{M}_3$ より非単調増大関数が存在するので補題 5.1 より NOT を合成できる．$\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{M}_4$ より非線形関数が存在するので補題 5.2 より AND と OR が合成できる．

これらにより $\mathcal{F}$ は万能であり, 定理 5.17 の十分性が証明された．

5.49

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を自己双対関数, $h(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を自己反双対関数とすると

$$\begin{aligned}
f &= g \oplus h \\
&= \bar{g}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \oplus h(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n) \\
&= g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \oplus 1 \oplus h(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n) \\
&= \{g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \oplus h(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)\} \oplus 1 \\
&= \overline{g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \oplus h(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)} \\
&= f^d
\end{aligned}$$

となるので f は自己双対関数である．

5.50

$$\begin{aligned}
f^d &= \overline{g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \oplus h(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)} \\
&= \{g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \oplus h(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)\} \oplus 1 \\
&= \{g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \oplus 1\} \oplus \{h(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n) \oplus 1\} \oplus 1 \\
&= \bar{g}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \oplus \bar{h}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n) \oplus 1 \\
&= g^d \oplus h^d \oplus 1
\end{aligned}$$

ここで, g と h は自己双対であるから,

$$\begin{aligned}
f^d &= g \oplus h \oplus 1 \\
&= f \oplus 1
\end{aligned}$$

5.51

しきい関数 f は

$$f = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \geq t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

と表現できる．その双対関数もしきい関数であり

$$f^d = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \geq -t + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) + w_{min} \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

と表現できる．ただし w_{min} は正の重みの中で最小の重みとする．
このとき, f と f^d について次の二つの場合について考える．

(1) $t \geq -t + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) + w_{min}$ の場合
このとき f は

$$f = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \geq t \geq -t + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) + w_{min} \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

となるので $f^d \geq f$ である．

(2) $-t + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) + w_{min} > t$ の場合
このとき f は

$$f = \begin{cases} 1 & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n > -t + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) + w_{min} > t \\ 0 & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

となるので $f > f^d$ である．

これらにより, しきい関数は双対比較可能関数である．
つぎに, しきい関数でなく, かつ双対比較可能な関数が存在することを示す．次の関数 f を考える．

$$f = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

f の双対関数 f^d は次のようになる．

$$f^d = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy \vee xz \vee yz$$

$f^d \geq f$ なので f は双対比較関数である．しかし, f はしきい値関数ではない．

5.52

$f_1 = g_6$
$f_2 = g_7$ $\boxed{\text{g9}}$
$f_3 = g_3$
$f_4 =$ $\boxed{\text{x}}$
$f_5 = g_2$
$f_6 = g_4$
$f_7 = g_1$
$f_8 = g_5$
$f_9 = g_8$