

4.1

1. 図1のカルノー図が表現する関数を考える. この関数の最小論理和形は $x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3$ で, かつ他に MSOP は無く, 一意に決まる. 一方, この関数は主項 x_1x_2 を持つが, これは必須主項ではない. よって, この命題は成立しない.

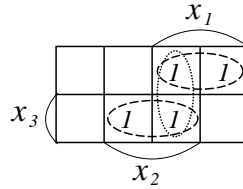


図 1: 4.1.1 のカルノー図

2. 図2のカルノー図が表現する関数を考える. この関数の最小論理和形は $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ で, かつ他に MSOP は無く, 一意に決まる. 一方, この関数の最小論理積形は $(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$ $(x_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$ の2通りが存在する. よって, この命題は成立しない.(2014年1月23日誤記修正)

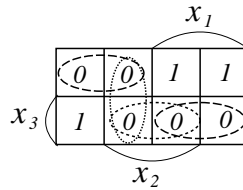


図 2: 4.1.2 のカルノー図

3. 図3のカルノー図が表現する関数を考える. この関数の最小論理和形は $x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3$ である. 一方, 図3より, 主項 x_1x_2 を含む最小論理和形は存在しない. よって, この命題は成立しない.

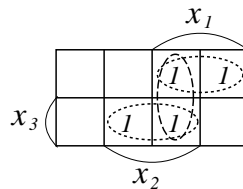


図 3: 4.1.3 のカルノー図

4. 図4のカルノー図が表現する関数を考える. この完全定義関数の最小論理和形は $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$ である. 一方, この関数では別の最小論理和形 $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3$ も存在する. よってこの命題は成立しない.

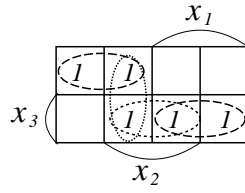


図 4: 4.1.4 のカルノー図

5. 完全定義関数 $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ を考える. この関数の一つの最小論理積形は $(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1\bar{x}_3)$ である. この関数において, 最小論理和形の積項数と最小論理積形の和項数は異なっている. よって, この命題は成立しない.

4.2

図 4.27 のカルノー図より最小論理和形を求める.

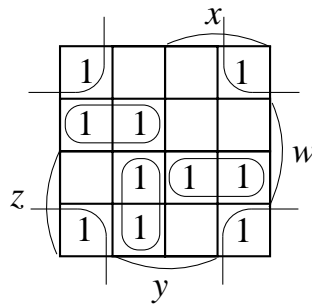


図 5: 4.2 のカルノー図

図 5 より最小論理和形は

$$f = \bar{y}\bar{w} \vee \bar{x}z\bar{w} \vee xz\bar{w} \vee \bar{x}yz$$

となる.

4.3

$$\begin{aligned} xy \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz &= xy \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy \\ &= x(y \vee \bar{y}z) \vee y(\bar{x}z \vee x) \\ &= x(y \vee z) \vee y(z \vee x) \\ &= xy \vee xz \vee yz \vee yx \\ &= xy \vee yz \vee zx \end{aligned}$$

したがって, $xy \vee yz \vee zx = xy \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$ である.

4.4

f のカルノー図を図 6 に示す.

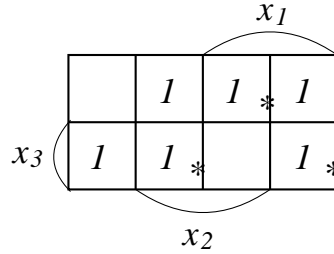


図 6: 4.4 のカルノー図

図 6 のカルノー図に * で示したセルを 2 個以上同時に包含する積項は存在しない. 従って, f は少なくとも 3 個の積項を含む.

4.5

4.4, 4.5 からわかるように, この関数は, $x_1x_2x_3 \cdots x_n$ と $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n$ が 0 となり, それ以外の最小項が 1 になる. ここで $x_1x_2x_3 \cdots x_n$ に隣接する最小項, すなわちハミング距離が 1 になる最小項は n 個存在し, これらを 2 個以上同時に包含する積項は存在しない. よって f は少なくとも n 個の積項を含む.

4.6

f のカルノー図を図 7 に示す. このカルノー図より f の最小論理和形は,

$$f = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{w} \vee \bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}z\bar{w} \vee x\bar{y}\bar{z}$$

よって, 少なくとも 6 つの項を含むことがわかる.

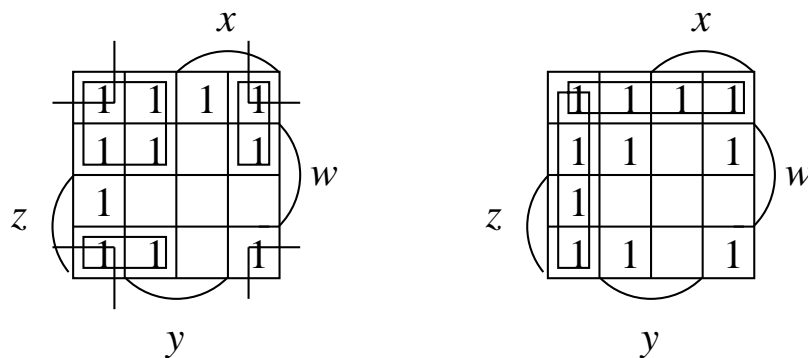


図 7:

4.7

与えられた論理式を変形すると

$$\begin{aligned} f &= xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \\ &= xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}(z \vee \bar{z}) \\ &= xy \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y} \end{aligned}$$

となる. AND-OR 最小二段回路を図 8 に示す.

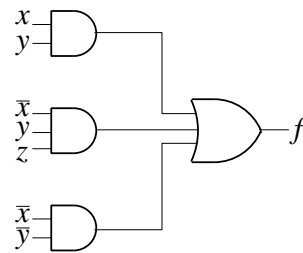


図 8: AND-OR 最小二段回路

4.8

$$\begin{aligned} f &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \\ \bar{f} &= \overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)} \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

よって, f のカルノー図は図 9(a) のようになる. 図 9(b) より

$$f = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_4 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_4$$

が求まり, AND-OR 最小二段回路は図 10 のようになる.

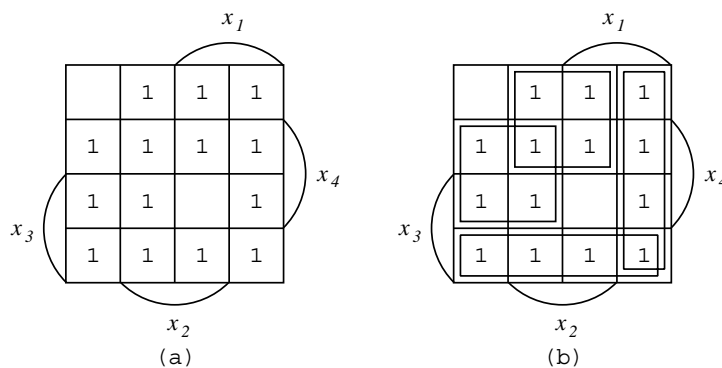


図 9: カルノー図

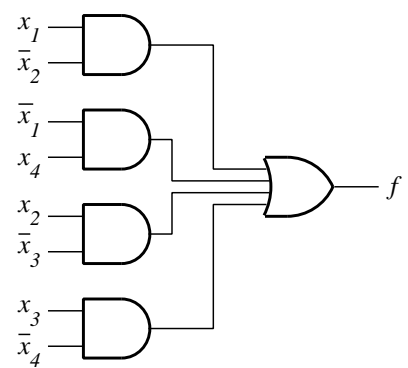


図 10: AND-OR 二段回路

4.9

与えられた関数のカルノー図を図 11 に示す。カルノー図より

$$f = xz \vee yw \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{w}$$

が得られる。AND-OR 最小二段回路を図 12 に示す。また、OR-AND 最小二段回路を求めるには、

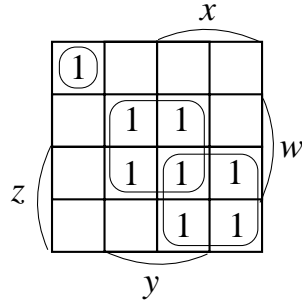


図 11: f のカルノー図

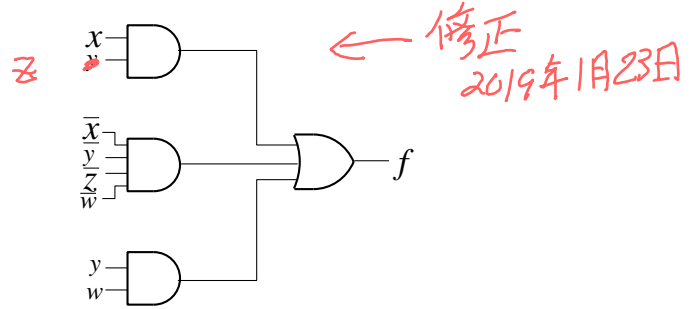


図 12: AND-OR 最小二段回路

← 修正
2019年1月23日

f の否定 \bar{f} の AND-OR 二段回路を求め、AND を OR に、OR を AND に変換し、入力のリテラルを反転するとよい。 f の否定 \bar{f} は

$$\bar{f} = x\bar{y}\bar{z} \vee y\bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}w \vee \bar{x}z\bar{w}$$

となる。 \bar{f} のカルノー図を図 13 に、OR-AND 最小二段回路を図 14 に示す。

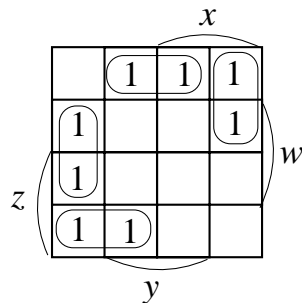


図 13: \bar{f} のカルノー図

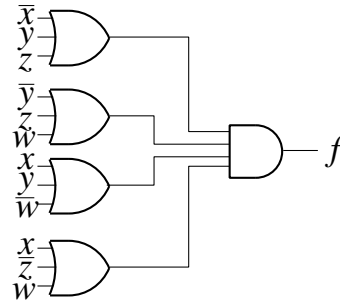


図 14: OR-AND 最小二段回路

これと先ほどの AND-OR 最小二段回路を比較すると、OR-AND 最小二段回路のほうが、入力端子数、AND に接続される端子数が多いため、複雑といえる。

4.10

z の真理値表を表 1 に示す。この真理値表より z のカルノー図を図 15 に示す。カルノー図より z は以下の式で表される。

$$z = x_0x_3 \vee x_0x_1\bar{x}_2 \vee x_0\bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_0x_1x_2 \vee \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

この式より AND-OR 二段回路を構成すると、図 16 のようになる。これより NOR 二段ゲートを構成すると、図 17 のようになる。

表 1:

x_3	x_2	x_1	x_0	z	x_3	x_2	x_1	x_0	z
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	d
0	0	1	1	0	1	0	1	1	d
0	1	0	0	1	1	1	0	0	d
0	1	0	1	0	1	1	0	1	d
0	1	1	0	0	1	1	1	0	d
0	1	1	1	1	1	1	1	1	d

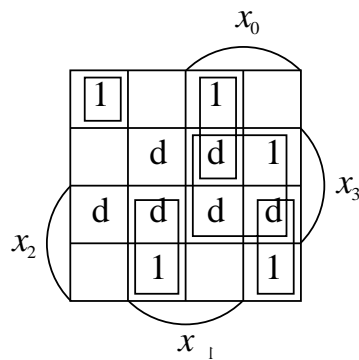


図 15:

4.11

x と y を比較して, 出力が

$$z_0 = 1 \quad (x > y \text{ のとき})$$

$$z_1 = 1 \quad (x = y \text{ のとき})$$

$$z_2 = 1 \quad (x < y \text{ のとき})$$

となるような 1 ビット比較回路の概念図を図 18 に示す. 図 18 より

$$z_0 = x \cdot \bar{y}$$

$$z_1 = x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$z_2 = \bar{x} \cdot y$$

を満たせばよい. 1 ビット比較回路の回路図を図 19 に示す. ビット数を増やしたときには, この回路を直列に接続する. n ビット比較回路の i ビット目の比較回路の概念図を図 20 に示す. これを実現する論理式は

$$z'_0 = z_0 \vee z_1 \cdot (x \cdot \bar{y})$$

$$z'_1 = z_1 \cdot (x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y})$$

$$z'_2 = z_2 \vee z_1(\bar{x} \cdot y)$$

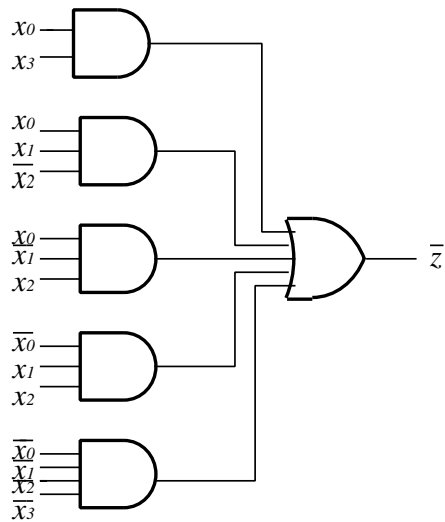


図 16:

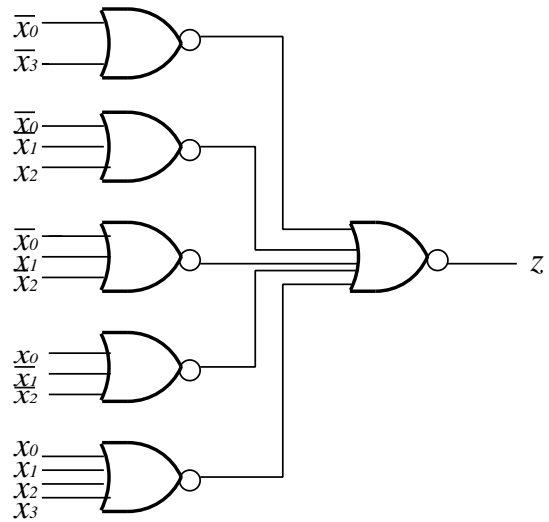


図 17:

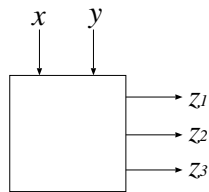


図 18: 1 ビット比較回路の概念図

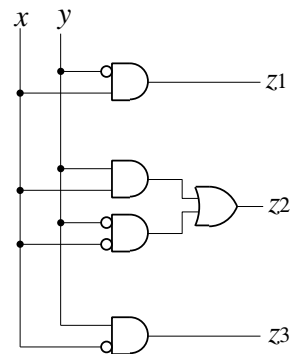


図 19: 1 ビット比較回路図

(2014年1月23日誤記修正) となる. 与えられた3桁の2進数比較回路の概念図を図21に, 回路図を図22に示す.

4.12

$Z = X \times Y$ を満たす真理値表を表2に示す. 表2より, z_0, z_1, z_2, z_3 のカルノー図をそれぞれ, 図

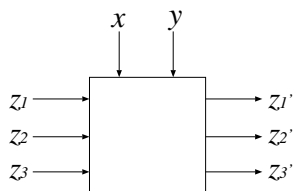


図 20: i ビット目の比較回路の概念図

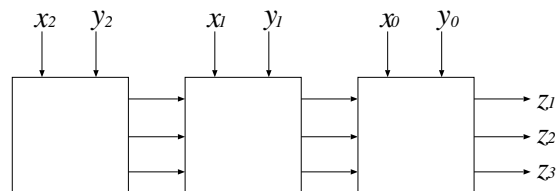


図 21: 3桁2進数比較回路の概念図

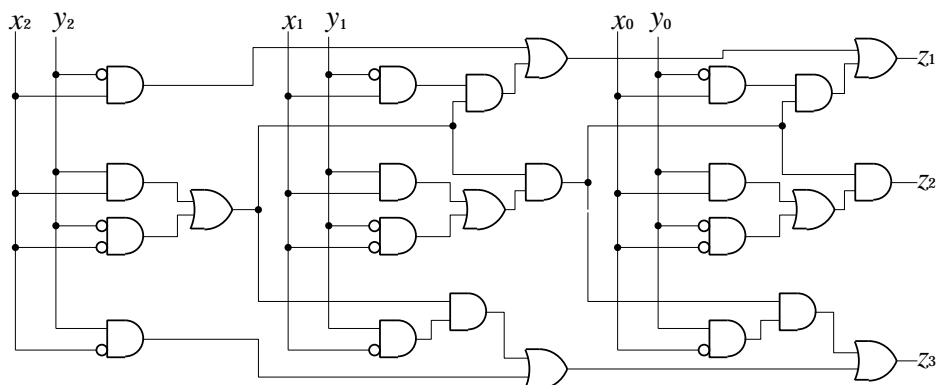


図 22: 3 桁 2 進数比較回路の回路図

表 2: 真理値表

X		Y		Z			
x_1	x_0	y_1	y_0	z_3	z_2	z_1	z_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1

23, 図 24, 図 25, 図 26 に示す. カルノー図より z_0, z_1, z_2, z_3 は

$$z_0 = x_0 y_0$$

$$z_1 = x_0 \bar{y}_0 y_1 \vee x_0 \bar{x}_1 y_1 \vee \bar{x}_0 x_1 y_0 \vee x_1 y_0 \bar{y}_1$$

$$z_2 = x_1 \bar{y}_0 y_1 \vee \bar{x}_0 x_1 y_1$$

$$z_3 = x_0 x_1 y_0 y_1$$

となる. それぞれの回路図を図 27, 図 28, 図 29, 図 30 に示す.

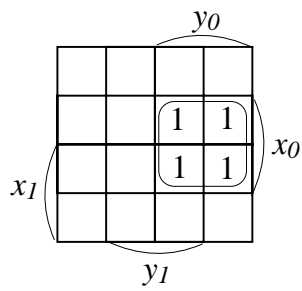


図 23: z_0 のカルノー図

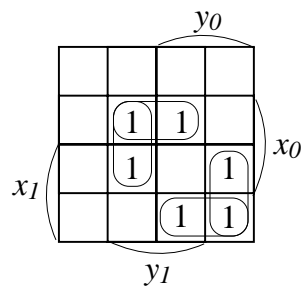


図 24: z_1 のカルノー図

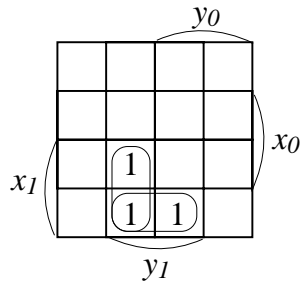


図 25: z_2 のカルノー図

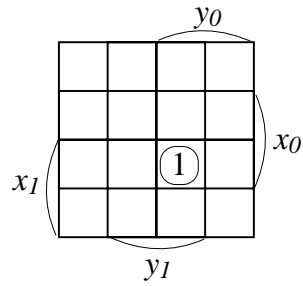


図 26: z_3 のカルノー図

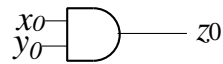


図 27: z_0 の回路図

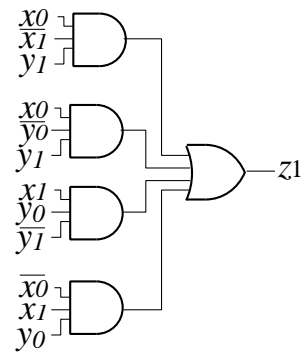


図 28: z_1 の回路図

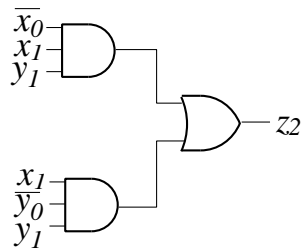


図 29: z_2 の回路図

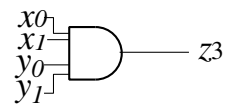


図 30: z_3 の回路図

表 3: 被覆表

		(a)										
		m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
A	×	×		×				×				
B	×		×	×					×			
C		×			×			×			×	
D				×				×	×			×
E			×			×						
F					×					×		
G						×	×					

		(b)		
		m_1	m_3	m_6
A	×			
B	×	×		
E		×	×	
G				×

4.13

n 変数アキレス鍵関数 f は,

$$f = x_1x_2x_3 \vee x_4x_5x_6 \vee \cdots \vee x_{3m-2}x_{3m-1}x_{3m}$$

と表現できる. ただし, $3m = n$ である. f の否定は,

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \overline{x_1x_2x_3 \vee x_4x_5x_6 \vee \cdots \vee x_{3m-2}x_{3m-1}x_{3m}} \\ &= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_6) \cdots (\bar{x}_{3m-2} \vee \bar{x}_{3m-1} \vee \bar{x}_{3m}) \end{aligned}$$

和項が m 個あり, 1 つの和項には 3 つの変数が含まれている. さらに, 各変数は式の中に 1 度しか表れない. よって, これを展開すると 3^m 個の積項が表れる.

4.14

被覆表を求めると表 3(a) の様になる. m_9, m_{10}, m_{11} が特異列である. 従って, 特異列と特異列に \times を持つ必須行 C, D, F を最終解に含め, 除去する. また, 必須行に被覆される列を除去すると, 表 3(b) が得られる. ここで, B は A を, E は G を支配するので A, G を除去する. m_1, m_6 は第 2 次特異列であり, B, E は第 2 次必須行である. 従って, 最終解は

$$\{B, C, D, E, F\}$$

となる.

4.15

- 1) 図 31 より, 主項は $x_2x_4\bar{x}_5, \bar{x}_2\bar{x}_4x_5, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4, x_1x_2x_3\bar{x}_4, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4, \bar{x}_1x_3x_4\bar{x}_5, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_5, x_1\bar{x}_3x_4\bar{x}_5, x_1x_2x_3\bar{x}_5, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_5, x_1x_3\bar{x}_4x_5, \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4x_5, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_5$

- 2) 最小論理和形は,

$$f = x_2x_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4x_5 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$$

4.16

与えられた条件を論理式にすると

$$x \text{ と } y \text{ は常に修得する} \rightarrow x \cdot y$$

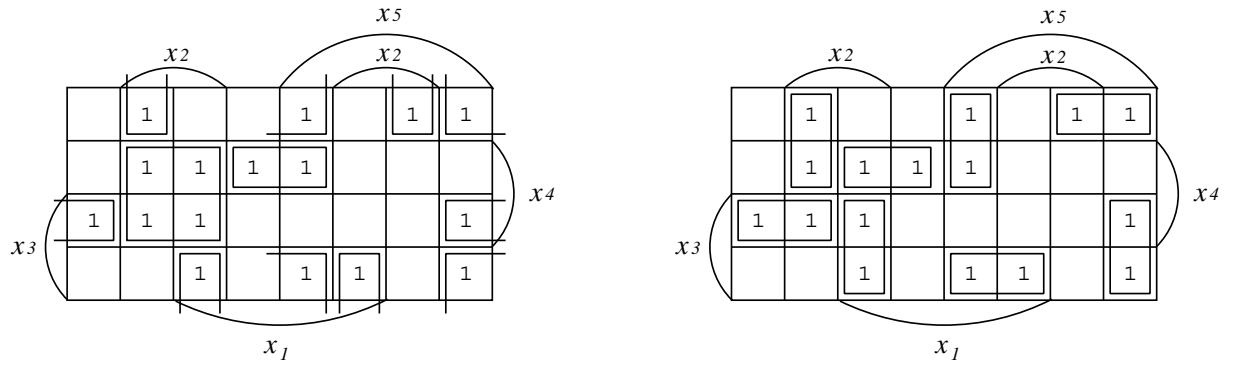


図 31: カルノー図

- z を修得していない場合は, x および u を修得する $\rightarrow z \vee \bar{z} \cdot (x \cdot u)$
- u を修得していない場合は, y または v を修得する $\rightarrow u \vee \bar{u} \cdot (y \vee v)$
- u を修得している場合は, w は不要である $\rightarrow u \vee w$

従って進級のため条件を論理式 f で表すと

$$f = (x \cdot y) \cdot (z \vee (\bar{z} \cdot (x \cdot u))) \cdot (u \vee (\bar{u} \cdot (y \vee v))) \cdot (u \vee w)$$

これを整理して

$$f = xy(zw \vee u)$$

を得る.

4.17

f のカルノー図を図 32 に示す. また, この主項生成の表を表 4, 表 5 に示す.

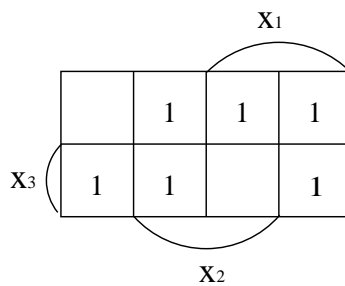


図 32:

表 5 より, サイクリックテーブルを表 6 に示す. 各行 P_i に対して, ブール変数 g_i を対応させると,

$$m_1 : g_1 \vee g_2, \quad m_2 : g_3 \vee g_4, \quad m_3 : g_1 \vee g_3, \quad m_4 : g_5 \vee g_6, \quad m_5 : g_2 \vee g_5, \quad m_6 : g_4 \vee g_6$$

これより,

$$(g_1 \vee g_2)(g_3 \vee g_4)(g_1 \vee g_3)(g_5 \vee g_6)(g_2 \vee g_5)(g_4 \vee g_6) = 1$$

表 4:

最小項	x_1	x_2	x_3
1	1	0	0
2	0	1	0
4	0	0	1
3	1	1	0
5	1	0	1
6	0	1	1

表 5:

最小項	x_1	x_2	x_3
1,3	1	-	0
2,5	1	0	-
2,3	-	1	0
2,6	0	1	-
4,5	-	0	1
4,6	0	-	1

表 6:

	1	2	3	4	5	6
$P_1 : x_1 \bar{x}_3$	×		×			
$P_2 : x_1 \bar{x}_2$	×				×	
$P_3 : x_2 \bar{x}_3$		×	×			
$P_4 : \bar{x}_1 x_2$		×				×
$P_5 : \bar{x}_2 x_3$				×	×	
$P_6 : \bar{x}_1 x_3$				×		×

展開して整理すると,

$$g_1 g_2 g_4 g_6 \vee g_2 g_3 g_4 g_5 \vee g_1 g_3 g_5 g_6 \vee g_2 g_3 g_6 \vee g_1 g_4 g_5 = 1$$

したがって, 非冗長論理和形は次の 5 つになる.

$$\mathcal{F}_1 = x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3$$

$$\mathcal{F}_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$$

$$\mathcal{F}_3 = x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3$$

$$\mathcal{F}_4 = x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3$$

$$\mathcal{F}_5 = x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$$

4.18

$$f = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$$

$$g = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_2 \vee x_4)$$

とおく.

$f \leq g$ の証明は

$$x_1 x_2 x_3 \leq g$$

$$x_1 x_2 x_4 \leq g$$

$$x_1 x_3 x_4 \leq g$$

$$x_2 x_3 x_4 \leq g$$

の証明をすれば十分である.

$$x_1 x_2 x_3 = 1 \text{ のとき } g = 1$$

$$x_1 x_2 x_4 = 1 \text{ のとき } g = 1$$

$$x_1 x_3 x_4 = 1 \text{ のとき } g = 1$$

$$x_2 x_3 x_4 = 1 \text{ のとき } g = 1$$

が成立する. これより, $f \leq g$ が成立する.