

表 1: 真理値表

x	y	z	w	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

表 2:

x_1	x_0	y_1	y_0	z
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

表 3: 真理値表

a	b	c	d	z
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

3.1

表 1 に真理値表を示す.

3.2

与えられた関係を表す真理値表を表 2 に示す.

3.3

表 3 に真理値表を示す.

3.4

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z, w) = & f(1, 1, 0, 0)xyz\bar{w} \vee f(1, 0, 1, 0)x\bar{y}z\bar{w} \vee f(0, 1, 1, 0)\bar{x}zyz\bar{w} \vee f(1, 1, 1, 0)xyz\bar{w} \vee \\
 & f(1, 0, 0, 1)x\bar{y}z\bar{w} \vee f(0, 1, 0, 1)\bar{x}yz\bar{w} \vee f(1, 1, 0, 1)xyz\bar{w} \vee f(0, 0, 1, 1)\bar{x}yz\bar{w} \vee \\
 & f(1, 0, 1, 1)x\bar{y}z\bar{w} \vee f(0, 1, 1, 1)\bar{x}yz\bar{w}
 \end{aligned}$$

よって, 論理和標準形 F_1 は

$$F_1 = xyz\bar{w} \vee x\bar{z}z\bar{w} \vee \bar{x}yz\bar{w} \vee xyz\bar{w} \vee x\bar{y}z\bar{w} \vee \bar{x}yz\bar{w} \vee xyz\bar{w} \vee \bar{x}yz\bar{w} \vee xyz\bar{w} \vee \bar{x}yz\bar{w}$$

論理積標準形は, \bar{F}_1 の論理和標準形を求め

$$\bar{F}_2 = \bar{F}_1 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}w \vee xyzw$$

これにド・モルガンの定理を用いて

$$\bar{F}_2 = (x \vee y \vee z \vee w)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{w})(x \vee \bar{y} \vee z \vee w)(x \vee y \vee \bar{z} \vee w)(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{w})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{w})$$

3.5

n 変数関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ にシャノン展開を $n - 1$ 回適用すると, 論理和形

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(c_2, c_3, \dots, c_n)} f(x_1, c_2, \dots, c_n) \cdot x_2^{c_2} x_3^{c_3} \cdots x_n^{c_n}$$

が得られる. このとき, 論理和は 2^{n-1} 個の要素に関して行う. よって, 積項数は高々 2^{n-1} である. 従って, 任意の n 変数論理関数は, 積項数が高々 2^{n-1} の論理和形をもつ.

3.6

(1) $f = x \vee y$ を x でシャノン展開すると

$$f = x \vee \bar{x}y$$

ここで, 各積項は共通部分をもたないので \vee を \oplus におきかえると

$$f = x \oplus \bar{x}y$$

ここで

$$\bar{x}y = (1 \oplus x)y = y \oplus xy$$

なる関係を用いると, リード・マラー標準形は

$$f = x \oplus y \oplus xy$$

となる.

(2) 与えられた論理式を変形すると

$$g = xy(\bar{z} \vee \bar{w}) \vee zw(\bar{x} \vee \bar{y}) = xy(zw \oplus 1) \vee zw(xy \oplus 1)$$

ここで $xy(zw \oplus 1) \cdot zw(xy \oplus 1) = 0$ なので \vee を \oplus におきかえると

$$g = xyzw \oplus xy \oplus xyzw \oplus zw = xyzw \oplus xyzw \oplus xy \oplus zw = xy \oplus zw$$

となる.

3.7

$$\begin{aligned} f(xyz) &= f(000)\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee f(001)\bar{x}\bar{y}z \vee f(010)\bar{x}y\bar{z} \vee f(011)\bar{x}yz \\ &\quad \vee f(100)x\bar{y}\bar{z} \vee f(101)x\bar{y}z \vee f(110)xy\bar{z} \vee f(111)xyz \\ &= \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z} \quad (\text{論理和標準形}) \\ \bar{f} &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \\ f &= (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \quad (\text{論理積標準形}) \end{aligned}$$

与えられた式を変形すると

$$f = x(y \oplus z) = xy \oplus xz \quad (\text{リード・マラー標準形})$$

3.8

- (1) n が偶数のとき $(1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1) \oplus \cdots \oplus (1 \oplus 1) = (0 \oplus 0) \oplus \cdots \oplus (0 \oplus 0) = 0$.
 n が奇数のとき $(1 \oplus 1) \oplus \cdots \oplus (1 \oplus 1) \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 1$.

(2)

x	x	$x \oplus x$
1	1	0
0	0	0

 従って $x \oplus x = 0$.

(3)

x	1	$x \oplus 1$
1	1	$0 = \bar{x}$
0	1	$1 = \bar{x}$

 従って $x \oplus 1 = \bar{x}$.

(4) $(x \oplus y)(y \oplus z)(z \oplus x) = (xy \oplus xz \oplus yy \oplus yz)(z \oplus x)$
 $= xyz \oplus xzz \oplus zyy \oplus yzz \oplus xxy \oplus xxz \oplus xyy \oplus xyz$
 $= xyz \oplus xyz \oplus xz \oplus xz \oplus xy \oplus xy \oplus yz \oplus yz$
 $= 0$

- (5) (a) $(x \oplus y = x \oplus z) \Rightarrow (y = z)$ を証明する.
 両辺に x を排他的論理和で加えると

$$\begin{aligned} x \oplus x \oplus y &= x \oplus x \oplus z \\ y &= z \end{aligned}$$

従って, $x \oplus y = x \oplus z$ ならば $y = z$ である.

- (b) $(y = z) \Rightarrow (x \oplus y = x \oplus z)$ を証明する.
 両辺に x を排他的論理和で加えると

$$x \oplus y = x \oplus z$$

よって上式は成り立つ.

- (a), (b) より $(x \oplus y = x \oplus z) \Leftrightarrow (y = z)$ は証明された.

- (6) (a) $(f = g \oplus h) \Rightarrow (g = f \oplus h)$ を証明する.
 $f = g \oplus h$ のとき, 両辺に h を排他的論理和で加えると

$$\begin{aligned} f &= g \oplus h \\ f \oplus h &= g \oplus h \oplus h \\ f \oplus h &= g \end{aligned}$$

となり, 証明できた.

- (b) $(g = f \oplus h) \Rightarrow (f = g \oplus h)$ を証明する.
 $g = f \oplus h$ のとき, 両辺に h を排他的論理和で加えると

$$\begin{aligned} g &= f \oplus h \\ g \oplus h &= f \oplus h \oplus h \\ g \oplus h &= f \end{aligned}$$

となり, 証明できた.

- よって (a), (b) より $(f = g \oplus h) \Leftrightarrow (g = f \oplus h)$ は証明された.

$$\begin{aligned}
(7) \text{ 右辺} &= (x \oplus a)(x \oplus b) = xx \oplus xa \oplus xb \oplus ab \\
&= x \oplus xa \oplus xb \oplus ab \\
\text{左辺} &= (\bar{a} \oplus b)x \oplus ab = (a \oplus 1) \oplus bx \oplus ab \\
&= x \oplus ax \oplus bx \oplus ab
\end{aligned}$$

従って右辺 = 左辺より, 等式が成立.

$$\begin{aligned}
(8) \text{ 左辺} &= (x \vee y) \oplus (y \vee z) = (x \oplus y \oplus xy) \oplus (y \oplus z \oplus yz) \\
&= x \oplus xy \oplus y \oplus y \oplus z \oplus yz = x \oplus xy \oplus 0 \oplus z \oplus yz \\
&= x \oplus xy \oplus z \oplus yz \\
\text{右辺} &= x\bar{y} \oplus \bar{y}z = x(y \oplus 1) \oplus (y \oplus 1)z \\
&= x \oplus xy \oplus z \oplus yz
\end{aligned}$$

よって, 等式が成立.

$$\begin{aligned}
(9) \quad xy \vee yz \vee zx &= (xy \oplus yz \oplus xy \cdot yz) \vee zx \\
&= (xy \oplus yz \oplus xyz) \oplus zx \oplus (xy \oplus yz \oplus xyz) \\
&= xy \oplus yz \oplus xyz \oplus zx \oplus xy \oplus yz \oplus xyz \\
&= xy \oplus yz \oplus zx
\end{aligned}$$

従って, 等式は成立.

3.9

表 4 に真理値表を示す. 真理値表より, $x = 1, y = 0, z = 1$ のとき, 左辺が 0 で右辺が 1 である. 従って, $x \oplus (y \vee z) \neq (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$ となる. よって反例を示すことができた.

表 4: 真理値表

x	y	z	$y \vee z$	$x \oplus (y \vee z)$	$x \oplus y$	$x \oplus z$	$(x \oplus y) \vee (x \oplus z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

3.10

$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee (x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4)$ において, $x_4 x_2 x_3 \vee x_4 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ を分配律を用いて $x_4(x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3)$ と変形すれば, 求める F は

$$F = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_4(x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3)$$

となる. これを実現する回路図を図 1 に示す.

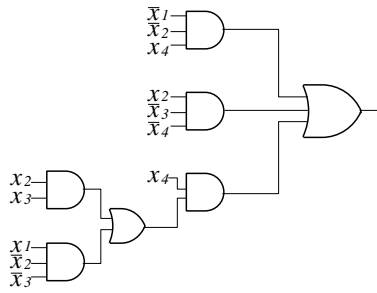


図 1: 3.10 の回路図

3.11

(a) $f = xy \oplus xz \oplus xw \oplus yz \oplus yw \oplus zw$ について $x = 0, 1$ と代入し f_0, f_1 をそれぞれ求めると

$$f_0 = yz \oplus yw \oplus zw$$

$$f_1 = y \oplus z \oplus w \oplus yz \oplus yw \oplus zw$$

f_0, f_1 において $y = 0, 1$ と代入して $f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}$ を求める.

$$f_{00} = zw$$

$$f_{01} = z \oplus w \oplus zw$$

$$f_{10} = z \oplus w \oplus zw = f_{01}$$

$$f_{11} = 1 \oplus z \oplus w \oplus z \oplus w \oplus zw = 1 \oplus zw = \overline{zw} = \bar{f}_{00}$$

次に $z = 0, 1$ と代入する.

$$f_{000} = 0, f_{110} = 1$$

$$f_{001} = w, f_{111} = \bar{w}$$

$$f_{010} = w = f_{001}$$

$$f_{011} = 1 \oplus w \oplus w = 1$$

以上のことを用いて, 図 2 に示す BDD を得る.

(b) $g = x \oplus y \oplus z \oplus w$ について (a) と同様にして,

$$g_0 = y \oplus z \oplus w$$

$$g_1 = 1 \oplus y \oplus z \oplus w = \bar{g}_0$$

$$g_{00} = z \oplus w$$

$$g_{01} = 1 \oplus z \oplus w = \bar{g}_{00}$$

$$g_{000} = w$$

$$g_{001} = 1 \oplus w = \bar{g}_{000}$$

以上のことより, 図 3 に示す BDD を得る.

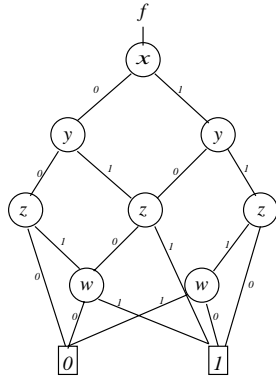


図 2:

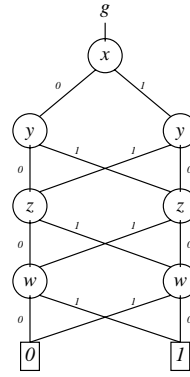


図 3:

3.12

変数を $x_1 < \dots < x_n$ まで展開したとき, ROBDD の非終端節点は $2^n - 1$ 個存在し, 残りの変数順序を $x_{n+1} < \dots < x_{2n}$ としたとき, $2^n - 1$ 個の非終端節点が必要であり, 0 と 1 を表す終端節点が必要である. したがって, $(2^n - 1) \times 2 + 2 = 2^{n+1}$ 個の節点が必要である.

3.13

f, g において $x = 0$ とした場合,

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 1 \cdot H(f(|x=0), g(|x=0)) \vee 0 \cdot H(f(|x=0), g(|x=0)) \\ &= H(f(|x=0), g(|x=0)) \\ &= \text{左辺} \end{aligned}$$

f, g において $x = 1$ とした場合,

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 0 \cdot H(f(|x=1), g(|x=1)) \vee 1 \cdot H(f(|x=1), g(|x=1)) \\ &= H(f(|x=1), g(|x=1)) \\ &= \text{左辺} \end{aligned}$$

以上より, 等式が成立する.

3.14

条件を満たす論理関数を f とする. 各ドアに備えているスイッチをそれぞれ, x_1, x_2, x_3, x_4 とすると

$$f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

が成立する. ここで

$$a \oplus b = \bar{a} \cdot b \vee a \cdot \bar{b}$$

という関係を用いて論理式 f を変形すれば,

$$(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4) = (\overline{(x_1 \oplus x_2)} \cdot (x_3 \oplus x_4) \vee (x_1 \oplus x_2) \cdot \overline{(x_3 \oplus x_4)})$$

となる. 与えられた条件を満たす配線図を図 4 に示す.

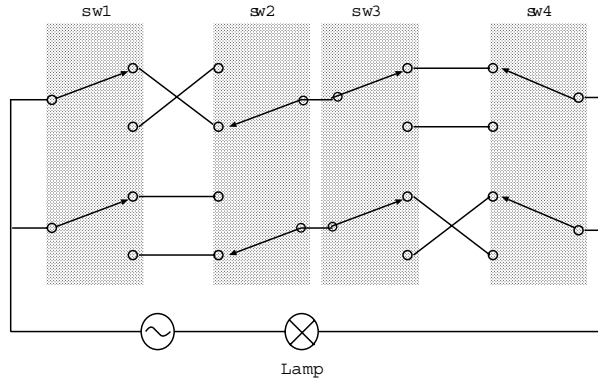


図 4: 3.14 の配線図

sw1, sw2, sw3, sw4 は各ドアに備わっているスイッチを, Lamp は電灯を表す. 図 4 の網かけ部分が上下同時に連動する.

3.15

シャノンの展開定理より,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(c_1, c_2, \dots, c_n)} f(c_1, c_2, \dots, c_n) x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n}$$

を得る. 各積項は互いに共通部分を持たないので,

$$\begin{aligned} f &= \bigoplus_{(c_1, c_2, \dots, c_n)} f(c_1, c_2, \dots, c_n) x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n} \\ &= f(0, 0, \dots, 0) \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \oplus f(1, 0, \dots, 0) x_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \oplus f(0, 1, 0, \dots, 0) \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n \\ &\quad \oplus \cdots \oplus f(0, 0, \dots, 0, 1) \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_{n-1} x_n \oplus f(1, 1, 0, \dots, 0) x_1 x_2 \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n \\ &\quad \oplus f(1, 0, 1, 0, \dots, 0) x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \cdots \bar{x}_n \oplus \cdots \oplus f(0, 0, \dots, 0, 1, 1) \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_{n-2} x_{n-1} x_n \\ &\quad \oplus \cdots \oplus f(1, 1, \dots, 1) x_1 x_2 \cdots x_n \\ &= a_0 (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2) \cdots (1 \oplus x_n) \oplus a_1 x_1 (1 \oplus x_2) \cdots \\ &\quad (1 \oplus x_n) \oplus a_2 (1 \oplus x_1) x_2 (1 \oplus x_3) \cdots (1 \oplus x_n) \\ &\quad \oplus \cdots \oplus a_n (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2) \cdots (1 \oplus x_{n-1}) x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 (1 \oplus x_3) \cdots (1 \oplus x_n) \\ &\quad \oplus a_{13} x_1 (1 \oplus x_2) x_3 (1 \oplus x_4) \cdots (1 \oplus x_n) \oplus \cdots \oplus a_{n-1, n} (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2) \cdots \\ &\quad (1 \oplus x_{n-2}) x_{n-1} x_n \oplus \cdots \oplus a_{12 \dots n} x_1 x_2 \cdots x_n \\ &= a_0 \oplus (a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \cdots \oplus a_n x_n) \oplus (a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus \cdots \oplus a_{n-1, n} x_{n-1} x_n) \\ &\quad \oplus \cdots \oplus a_{12 \dots n} x_1 x_2 \cdots x_n \end{aligned}$$

3.16

ド・モルガンの定理より

$$f = \overline{\overline{xy} \vee z} = xy \cdot \bar{z}$$

$$g = \overline{\overline{xy} \cdot u} = xy \vee \bar{u}$$

表 5:

x	y	z	$xy \cdot \bar{z} = f$	x	y	u	$xy \vee \bar{u} = g$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1

したがって真理値表は表 5 のようになる。

3.17

NAND ゲートは、入力の値が 1 つでも 0 であれば、出力は 1 となる。また、定数 1 の入力は削除しても出力値は変化しない。さらに、NAND ゲートは、図 5 のように置き換えることができる。

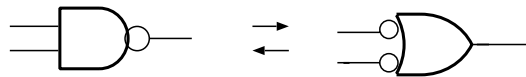


図 5: NAND ゲートの置き換え

$w = 0$ とすると、図 6 のような回路に簡単化できる。

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z, 0) &= (x \vee \bar{x}y)z \vee (x \vee \bar{y})\bar{z} \\
 &= xz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \\
 &= x(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}yz \vee \bar{y}\bar{z} \\
 &= x \vee \bar{x}yz \vee \bar{y}\bar{z}
 \end{aligned}$$

同様に、 $w = 1$ とすると、図 7 のような回路に簡単化できる。

$$f(x, y, z, 1) = \bar{\bar{z}} = \bar{z}$$

よって、図 8 のような出力関数のカルノー図を得る。

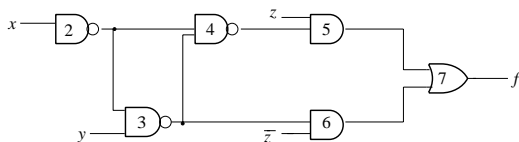


図 6: $f(x, y, z, 0)$ の回路

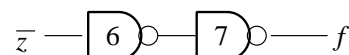


図 7: $f(x, y, z, 1)$ の回路

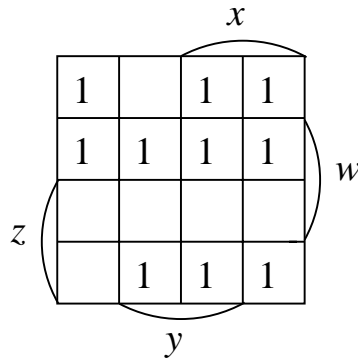


図 8: 出力関数のカルノー図

表 6:

A	B	C	D	f	A	B	C	D	f
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3.18

回路図の左半分を図 9 に示す. この部分は, 2 入力 NAND のみで構成されている. したがって, 入力の値が 1 つでも 0 ならば出力値は 1 となり, 入力の値が 1 ならば出力値は他方の入力値の否定になる. よって $A = 0$ のとき, 左半分の回路の出力値は B になる. また, $A = 1$ のとき, 出力値は \bar{B} となる. つまり $A \oplus B$ を実現する.

次に, 回路図の右半分を図 10 に示す. なお, この回路では出力 f に一番近い NAND 素子を OR とインバータに置き換えている. このインバータの部分と, この入力につながっている NOT 部分を打ち消す. 次に, この回路で $B = 0$ の場合と $B = 1$ の場合に分けて考える. $B = 0$ の場合, x の NAND 出力が 1 となるので $f = 1$ となる. $B = 1$ の場合, y の NAND 出力が 1 となるので $f = 1$ となる. よって, いずれの場合も $f = 1$ となる. つまり, 回路図全体の出力は必ず 1 となる. この回路図の出力関数の真理値表を表 6 に示す.

3.19

NAND ゲートでは, 入力の値が 1 つでも 0 となれば, 他の入力には無関係に, ゲートの出力は 1 となる. 例えば, $A=0$ とすると, ゲート 1, 2, 6 の出力は 1 となり, これらのゲートは定数 1 の信号線で置き換えることができる. NAND ゲートでは, 定数 1 の入力は省略しても出力値は変化しない. さらに, 出力から数えて奇数段目にある NAND ゲートの記号を違う記号で置き換えたものを図 11 に示す. ここで, 出力段とその前の段の間の否定は打ち消されるので無視できる. したがって

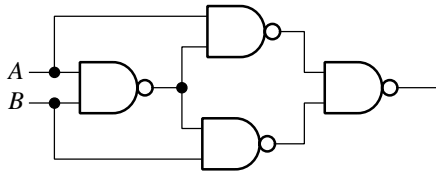


図 9: 3.18 の左半分の回路図

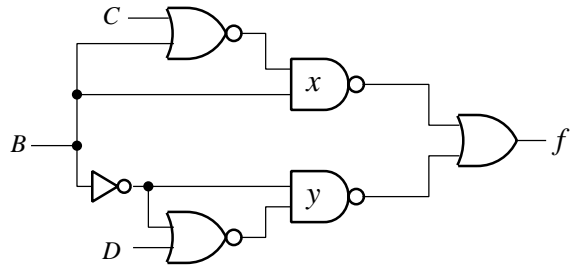


図 10: 3.18 の右半分の回路図

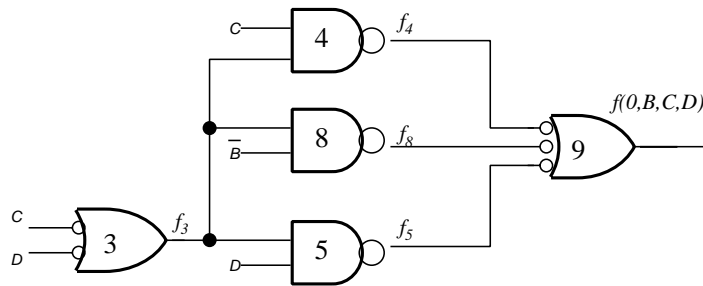


図 11:

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \bar{C} \vee \bar{D} \\
 f_4 &= C f_3 = C(\bar{C} \vee \bar{D}) = C\bar{D} \\
 f_5 &= D f_3 = D(\bar{C} \vee \bar{D}) = \bar{C}D \\
 f_8 &= \bar{B}(\bar{C} \vee \bar{D}) = \bar{B}\bar{C} \vee \bar{B}\bar{D} \\
 f(0, B, C, D) &= f_4 \vee f_5 \vee f_8 = C\bar{D} \vee \bar{C}D \vee \bar{B}\bar{C} \vee \bar{B}\bar{D}
 \end{aligned}$$

次に $A=1$ とすると、ゲート 6 の出力は 0 になり、ゲート 8 の出力は 1 になる。さらに、奇数段目にある NAND ゲートの記号を置き換えると図 12 のようになる。

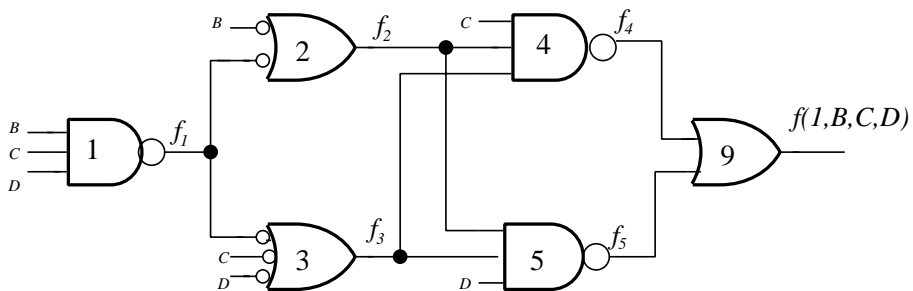


図 12:

出力段とその前の段の間の否定は打ち消されるので無視できる。図 12 より

$$f_1 = BCD$$

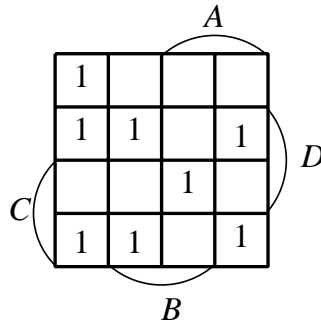


図 13:

$$\begin{aligned}
 f_2 &= \bar{B} \vee BCD \\
 f_3 &= \bar{C} \vee \bar{D} \vee BCD \\
 f_4 &= Cf_2f_3 \\
 f_5 &= Df_2f_3 \\
 f(1, B, C, D) &= Cf_2f_3 \vee Df_2f_3 = \bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee BCD \vee \bar{B}\bar{C}D
 \end{aligned}$$

以上のことよりカルノー図を作成すると図 13 のようになる。

3.20

命題を論理式で表すと

$$\begin{aligned}
 \text{飯塚で雨が降っているが博多では降っていない} &\rightarrow I \cdot \bar{H} \\
 \text{飯塚あるいは小倉の少なくとも一方で雨が降っていない} &\rightarrow \bar{I} \vee \bar{K} \\
 \text{飯塚と博多と小倉で雨が降っている} &\rightarrow I \cdot H \cdot K
 \end{aligned}$$

従って, これを論理式 f で表し, 吸収律を用いて変形すると

$$\begin{aligned}
 f &= I \cdot \bar{H} \vee (\bar{I} \vee \bar{K}) \vee I \cdot H \cdot K \\
 &= I \cdot \bar{H} \vee \bar{I} \vee \bar{K} \vee I \cdot H \cdot K \\
 &= I \cdot \bar{H} \vee \bar{I}\bar{H} \vee \bar{I} \vee \bar{K} \vee I \cdot H \cdot K \vee I \cdot H \cdot \bar{K} \\
 &= \bar{H} \vee \bar{I} \vee \bar{K} \vee I \cdot H \\
 &= \bar{H} \vee \bar{K} \vee \bar{I} \vee IH \\
 &= \bar{H} \vee \bar{K} \vee \bar{I} \vee H \\
 &= \bar{I} \vee 1 \vee \bar{K} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

したがって命題は真である。

3.21

$x\bar{y} \vee \bar{x}y = z$ より $x \oplus y = z$ が成立する.

両辺に x を \oplus で加算すると, $x \oplus (x \oplus y) = x \oplus z$.

これより, $y = x \oplus z = x\bar{z} \vee \bar{x}z$ を得る.

3.22

$x \vee y = z$ を満たす割り当ては, 両辺をともに 1 にする割り当て, 又は両辺をともに 0 とする割り当てである. 従って,

$$(x \vee y) \cdot z \vee \overline{(x \vee y)} \cdot \bar{z} = 1 \quad (1)$$

を満たす

$$x \vee yz = 1 \quad (2)$$

(1) と (2) を同時に満足する条件は

$$[(x \vee y) \cdot z \vee \overline{(x \vee y)} \cdot \bar{z}](x \vee yz) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (xz \vee yz \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z})(x \vee yz) \\ &= xz \vee xyz \vee xyz \vee yz = xz \vee yz = (x \vee y)z. \end{aligned}$$

従って, $(x, y, z) = (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$ の三つの割り当てが条件を満たす.

3.23

$\bar{x} \vee xy = 0$ の両辺の否定を考える.

$$x \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) = 1 \quad (3)$$

$xy = xz$ より,

$$(xy)(xz) \vee (\overline{(xy)} \cdot \overline{(xz)}) = 1 \quad (4)$$

(3)(4) を同時に満足する条件は,

$$[x(\bar{x} \vee \bar{y})] \cdot [(xy)(xz) \vee \overline{(xy)} \cdot \overline{(xz)}] = 1$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (x\bar{y})[xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{z})] \\ &= x\bar{y}(xyz \vee \bar{x} \vee \bar{y}\bar{z}) \\ &= x\bar{y}\bar{z}. \end{aligned}$$

これより, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ が上の条件を満たす.