2.1

(a) 束ではない.

$b \cdot c$ が一意に決まらない.

(b) 束ではない.

a∨b が定義されていない.

(c) 束である.

表 1 に演算表を示す.

表 1:

$\vee$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	a	b
c	a	a	c	c	c	c
d	a	b	c	d	c	d
e	a	a	c	c	e	e
f	a	b	c	d	e	f

$\cdot$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	b	d	d	f	f
c	c	d	c	d	e	f
d	d	d	d	d	f	f
e	e	f	e	f	e	f
f	f	f	f	f	f	f

2.2

図 1 の任意の要素に対して, $x \geq z$ ならば, $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee z$.

図 1 より, $a \vee b = 1$, $a \cdot b = 0$, $b \vee c = 1$, $b \cdot c = 0$, $c \vee a = 1$, $c \cdot a = 0$, $a \cdot (b \vee c) = a \cdot 1 = a$. $(a \cdot b) \vee (a \cdot c) = 0 \vee 0 = 0$. 従って, $a \cdot (b \vee c) \neq (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$. よって, 分配束ではない.

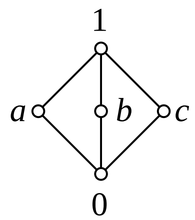

図 1: 2.2 の図

2.3

a, d, e に対して,

$$a \cdot (e \vee d) = a \cdot 1 = a$$

$$(a \cdot e) \vee d = 0 \vee d = d$$

$$(a \cdot e) \vee (a \cdot d) = 0 \vee d = d$$

$$a(e \vee d) \neq (a \cdot e) \vee (a \cdot d)$$

なので分配束でない.
ここで $a \geq d$ で $a \cdot (e \vee d) \neq (a \cdot e) \vee d$ なのでモジュラ束でない.

2.4
分配束は任意の要素 $a, b, c \in A$ に対して $a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$ を満たす. $a \geq c$ ならば $a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c) = (a \cdot b) \vee c$ なのでモジュラ束の条件を満たす. 従って分配束はモジュラ束である.

2.5
ブール代数か否かを判定するには, 次の 4 つの公理 (ハンンチントンの公理) を満たすことを調べれば十分である.

単位元 $a \vee 0 = a, a \cdot 1 = a$
交換律 $a \vee b = b \vee a, a \cdot b = b \cdot a$
分配律 $a \vee (b \cdot c) = (a \vee b) \cdot (a \vee c), a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$
相補律 $a \vee \bar{a} = 1, a \cdot \bar{a} = 0$

集合 A は, A= {1, 2, 3, 6 }.

$$LGM(a, O) = LGM(a, 1) = a$$
$$GCD(a, I) = GCD(a, 6) = a$$

よって, 単位元が成り立つ.

$$LGM(a, b) = LGM(b, a)$$
$$GCD(a, b) = GCD(b, a)$$

交換律が成り立つ.

$$LGM(a, GCD(b, c)) = GCD(LGM(a, b), LGM(a, c))$$
$$GCD(a, LGM(b, c)) = LGM(GCD(a, b), GCD(a, c))$$

分配律が成り立つ.
$a = 1, 2, 3, 6$ のとき, $\bar{a} = 6, 3, 2, 1$ である.

$$LGM(a, \bar{a}) = LGM(1, 6) = LGM(2, 3) = LGM(3, 2) = LGM(6, 1) = 6$$
$$GCD(a, \bar{a}) = GCD(1, 6) = GCD(2, 3) = GCD(3, 2) = GCD(6, 1) = 1$$

よって, 相補律も成り立つ.
以上より与えられた集合 A はブール代数のモデルである.

2.6
図 2 において, A は半順序集合, B は束, C は分配束, D はブール代数を表す. A は反射律, 半対称律, 推移律を満たす集合. B は集合上で二つの二項演算 $\wedge$ と $\vee$ が定義されており, べき等律, 交換律, 結合律, 吸収律を満たす集合. C は B の他に分配律を満たす. D は C の他に補元が定義されている集合.

2.7
・単位元について, $a \vee 0 = a, a \cdot 1 = a$ を満たすので成立する.
・交換律について, $a \vee b = b \vee a, a \cdot b = b \cdot a$ を満たすので成立する.
・分配律について, $a \vee (b \cdot c) = (a \vee b) \cdot (a \vee c), a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$ を満たすので成立する.
・相補律 $(a \vee \bar{a} = 1, a \cdot \bar{a} = 0)$ について, 集合 A の要素 a の場合,
$\bar{a} = a$ より

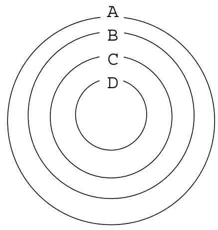

図 2: 2.6 の図

$a \vee \bar{a} = a \vee a = a \neq 1$
$a \cdot \bar{a} = a \cdot a = a \neq 0$
となり, 成立しない.

2.8

$\vee$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	1	1	1
a	a	1	a	1
b	b	1	1	b

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	a	0
b	0	b	0	b

x	$\bar{x}$
0	1
1	0
a	b
b	a

2.9
集合 A, B の要素はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120\} \\ B &= \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1), \\ &\quad (2,0,0),(2,0,1),(2,1,0),(2,1,1),(3,0,0),(3,0,1),(3,1,0),(3,1,1)\} \end{aligned}$$

A, B のハッセ図をそれぞれ図 3, 図 4 に示す. $x \in A, (x_1, x_2, x_3) \in B$ とするとき, $f(2^{x_1}3^{x_2}5^{x_3}) = (x_1, x_2, x_3)$ とおく. また, 任意の $x, y \in A$ に対して, ハッセ図より, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$, $f(\bar{x}) = \bar{f}(x)$, $f(1) = f(2^0 3^0 5^0) = (0,0,0)$, $f(120) = f(2^3 3^1 5^1) = (3,1,1)$ が成り立つので, 代数 1 と代数 2 は同形である.

2.10
これは環の公理を満たしており, 任意の $x (\neq 0)$ に対して $x \cdot y = y \cdot x = 1$ なる y が存在する. よってこれは体である.

2.11
$a, b, c \in R$ について

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - b \cdot c) \\ &= a + (b + c - b \cdot c) - a \cdot (b + c - b \cdot c) \\ &= a + b + c - b \cdot c - a \cdot b - a \cdot c + a \cdot b \cdot c \end{aligned}$$

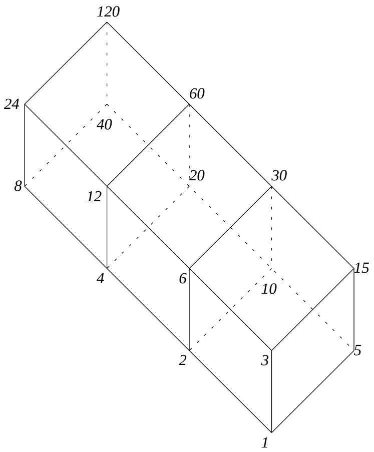

図 3:

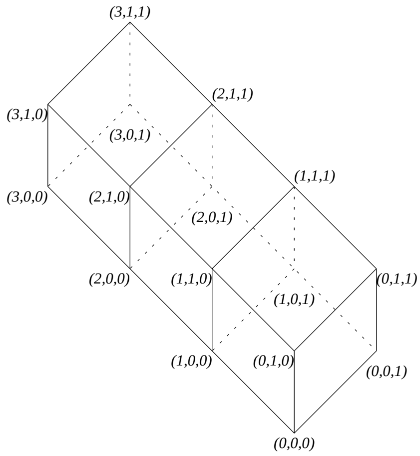

図 4:

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (a+b-b\cdot c)*c\\ &= (a+b-a\cdot b)*c\\ &= a+b-a\cdot b+c-a+b-a\cdot b\cdot c\\ &= a+b+c-a\cdot b-b\cdot c-c\cdot a+a\cdot b\cdot c\end{aligned}$$

$a*(b*c)=(a*b)*c$ より結合律を満たす.

$a,b\in R$ について

$$a*b=a+b-a\cdot b$$

$$b*a=b+a-b\cdot a$$

ここで, a,b は実数だから

$$a\cdot b=b\cdot a, a+b=b+a$$

よって,

$$\begin{aligned}b*a &= b+a-b\cdot a\\ &= a+b-a\cdot b\\ &= a*b\end{aligned}$$

よって交換律を満たす.

2.12

$\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{a\vee b}$ の証明.

式 $(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot(a\vee b)$ を考える.

$$\begin{aligned}(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot(a\vee b) &= (\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot a)\vee(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot b) && (\text{分配律})\\ &= 0\vee 0 && (\text{相補律})\\ &= 0\end{aligned}$$

式 $(\bar{a}\cdot\bar{b})\vee(a\vee b)$ を考える.

$$
\begin{aligned}
(\bar{a}\cdot\bar{b})\vee(a\vee b) &= \bar{a}\cdot\bar{b}\vee a\cdot(b\vee\bar{b})\vee b && (\text{単位元, 相補律})\\
&= \bar{a}\cdot\bar{b}\vee a\cdot b\vee a\cdot\bar{b}\vee b && (\text{分配律})\\
&= a\cdot b\vee\bar{b}\cdot(a\vee\bar{a})\vee b && (\text{分配律})\\
&= a\cdot b\vee\bar{b}\vee b && (\text{相補律, 単位元})\\
&= 1 && (\text{相補律, 単位元})
\end{aligned}
$$

よって, $(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot(a\vee b)=0$ かつ $(\bar{a}\cdot\bar{b})\vee(a\vee b)=1$ である.
ゆえに, 相補律より $\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{a\vee b}$ が成り立つ.

$\bar{a}\vee\bar{b}=\overline{a\cdot b}$ の証明.
式 $(\bar{a}\vee\bar{b})\cdot(a\cdot b)$ を考える.

$$
\begin{aligned}
(\bar{a}\vee\bar{b})\cdot(a\cdot b) &= \bar{a}\cdot a\cdot b\vee a\cdot b\cdot\bar{b} && (\text{分配律})\\
&= 0
\end{aligned}
$$

式 $(\bar{a}\vee\bar{b})\vee(a\cdot b)$ を考える.

$$
\begin{aligned}
(\bar{a}\vee\bar{b})\vee(a\cdot b) &= a\cdot b\vee\bar{a}\cdot(b\vee\bar{b})\vee\bar{b} && (\text{相補律, 単位元})\\
&= a\cdot b\vee\bar{a}\cdot b\vee\bar{a}\cdot\bar{b}\vee\bar{b} && (\text{分配律})\\
&= b\cdot(a\vee\bar{a})\vee\bar{a}\cdot\bar{b}\vee\bar{b} && (\text{分配律})\\
&= b\vee\bar{b}\vee\bar{a}\cdot\bar{b} && (\text{相補律, 単位元})\\
&= 1
\end{aligned}
$$

よって, $(\bar{a}\vee\bar{b})\cdot(a\cdot b)=1$ かつ $(\bar{a}\vee\bar{b})\vee(a\cdot b)=0$ である.
ゆえに, 相補律より $\bar{a}\vee\bar{b}=\overline{a\cdot b}$ が成り立つ.

2.13

ブール関数では,

$$f(x)=\bar{x}f(0)\vee xf(1)$$

が成立する. これに, 表の値を代入すると,

$$f(x)=\bar{x}\cdot a\vee x\cdot 1$$

となる.

$$
\begin{aligned}
&f(0)=1\cdot a\vee 0\cdot 1=a\vee 0=a\\
&f(1)=0\cdot a\vee 1\cdot 1=0\vee 1=1\\
&f(a)=\bar{a}\cdot a\vee a\cdot 1=0\vee a=a\\
&f(\bar{a})=a\cdot a\vee\bar{a}\cdot 1=a\vee\bar{a}=1
\end{aligned}
$$

となり, $x=0,1,\bar{a}$ のとき $f(x)$ は表の値と一致する.
しかし, $x=a$ のとき表では $f(a)=\bar{a}$ となっている.
よって, $f(a)=a$ とすれば表はブール関数になる.

2.14

(a) 図 5 に示す.

(b) 図 6 に示す.

(c) 図 7 に示す.

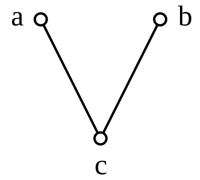

図 5: 2.14 の (a) 半順序集合であるが束ではない例

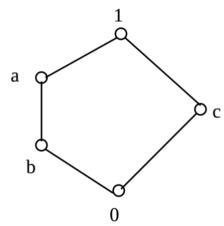

図 6: 2.14(b) 非分配束の例

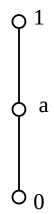

図 7: 2.14(c) 分配束ではあるがブール代数ではない例

2.15

a. $T \times T = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$ より，ハッセ図は図 8 のようになる．

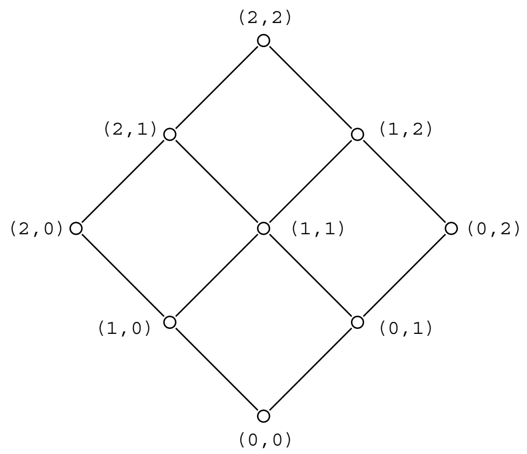

図 8: ハッセ図

b. 束である．

c. 要素の数が 2 のべき乗でないので，ブール代数ではない．

2.16

$a \vee b = a \vee c$ の両辺に b との AND をとると，$b(a \vee b) = b(a \vee c)$．吸収律より，$b = b(a \vee c) = ab \vee bc$．次に $a \vee b = a \vee c$ の両辺に c との AND をとると，$c(a \vee b) = c(a \vee c)$．吸収律より，$c = c(a \vee b) = ac \vee bc$．$ab = ac$ なので，$ab \vee bc = ac \vee bc$．従って，$b = c$ が成立する．(2014 年 1 月 23 日，誤記修正）

2.17

体にならない．

$x = 2$ のとき $(x, y \in Z_4)$

零でない任意の y に対して $x \cdot y = y \cdot x = 1$ なる y が存在しない．

2.18

F_x を，x をリテラルとして持つ積項のみからなる論理和形とし，$F_{\bar{x}}$ を $\bar{x}$ をリテラルとして持つ積項のみからなる論理和形とする．また，F_a を $x, \bar{x}$ をリテラルとして持たない積項のみからなる論理和形とする．

ここで，ブール関数はブール式で表現できる．また，ブール式はブール代数の公理系より論理和形で表現できる．よって

$$f(x) = F_x \vee F_{\bar{x}} \vee F_a$$

と表せる.
$\bar{x}f(0) \vee xf(1)$ について考える. これは, 次のように表せる.

$$\bar{x}f(0) \vee xf(1) \quad = \quad \bar{x}(F'_{\bar{x}} \vee F_a) \vee x(F'_x \vee F_a)$$

但し, $F'_{\bar{x}}$ は $F_{\bar{x}}$ の変数 x に 0 を代入したものであり, F'_x は F_x の変数 x に 1 を代入したものである.
この右辺を展開すると

$$\begin{aligned}
\bar{x}(F'_{\bar{x}} \vee F_a) \vee x(F'_x \vee F_a) &= \bar{x}F'_{\bar{x}} \vee \bar{x}F_a \vee xF'_x \vee xF_a \\
&= F_{\bar{x}} \vee \bar{x}F_a \vee F_x \vee xF_a \\
&= F_{\bar{x}} \vee F_x \vee F_a
\end{aligned}$$

なので結局

$$f(x) = \bar{x}f(0) \vee xf(1)$$

となる.