1.1

$D(n)$ は n の約数の集合を $|D(n)|$ は集合 $D(n)$ の要素の数を表している.
よって, $|D(n)|$=2 であるような集合は, 素数の集合である.

1.2

方針: A, B を集合とするとき, $A = B$ を証明するには $A \subseteq B$ および $A \supseteq B$ を示せばよい. $A \subseteq B$ を示すには, $^\forall a \in A$ に対して $a \in B$ が成立することを示せばよい. ベン図を使って説明するのは証明とはいえない.

1) $x \in A \cup (B \cap C)$ とする. $x \in A$ または $x \in (B \cap C)$ が成立する. $x \in (B \cap C)$ が成立するとき, $x \in B$ かつ $x \in C$ である. つまり, $x \in A$ または $x \in B$ かつ $x \in C$ が成立する. このとき, $x \in (A \cup B)$ かつ $x \in (A \cup C)$ が成立する. 従って, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. よって, $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立.

2) $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とすると, $x \in (A \cup B)$ かつ $x \in (A \cup C)$ が成立する. つまり, $x \in A$, または $x \in A$ かつ $x \in B$, または $x \in A$ かつ $x \in C$, または $x \in B$ かつ $x \in C$ が成立する. 従って, $x \in A \cup (B \cap C)$. よって, $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立する.

従って, 1), 2) の結果より, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.3

(1) 成立しない.
(反例)A={1,2,3}, B={3,4,5}, C={4,5}, B≠C
このとき, $A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ が成立する.

(2) 成立しない.
(反例)A={1,2,3},B={3,4},C={3,4,5}, B≠C
このとき, $A \cap B = A \cap C = \{3\}$ が成立する.

(3) 成立する.
(証明) 両辺に $A\oplus$ を加える.

$$\begin{aligned} A \oplus A \oplus B &= A \oplus A \oplus C \\ B &= C \end{aligned}$$

(4) 成立する.
(証明) $$\begin{aligned} A \cap (\overline{B \cap C}) &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \quad \text{(ドモルガンの法則)} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \end{aligned}$$

1.4

1) $|A \cup B|$ は図 1 に示した暗い部分. しかし, $(A \cap B)$ の部分は A と B が重なってできた部分なので, $(A \cap B)$ 一つ分つまり $|A \cap B|$ を引くと良い. よって, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ となる.

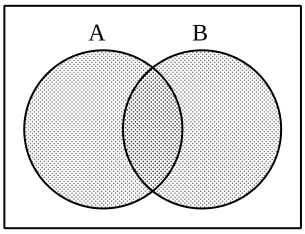

図 1: 1.4(1) のベン図

2) $|A \cup B \cup C|$ は図 2 に示した暗い部分. $B \cup C = D$ とおくと, $|A \cup B \cup C| = |A \cup D|$ となり,

$$
\begin{aligned}
|A \cup D| &= |A| + |D| - |A \cap D| \\
&= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|
\end{aligned}
$$

$|(A \cap B) \cup (A \cap C)|$ は図 3 の暗い部分で, 対象の領域から重なった部分を引くと求まる. $|(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$. よって, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$ が成立する.

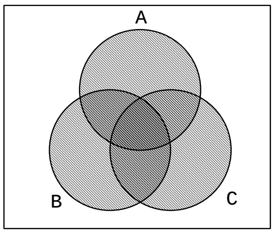

図 2: 1.4(2) の $|(A \cap B) \cup (A \cap C)|$ を示すベン図

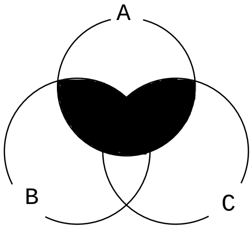

図 3: 1.4(2) の $|(A \cap B) \cup (A \cap C)|$ を示すベン図

1.5

図 4 より, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. 従って, 各値を代入すると, $|A \cup B \cup C|$=56 である.

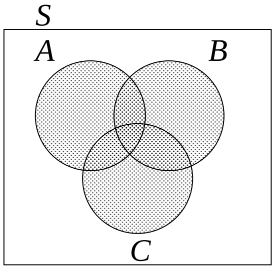

図 4: ベン図

1.6

音楽が好きな者の集合を A, 絵の好きな者の集合を B, スポーツの好きな者の集合を C とする. 題意より, $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, $|A{\cup}B{\cup}C| = n$, $|A{\cap}B| = d$ $|B{\cap}C| = e$, $|A{\cap}C| = f$ である. 求めたいのは図 5 の暗い部分. $|A{\cap}B{\cap}C| = x$ とおく. 1.4 の結果から $n = a{+}b{+}c{-}d{-}e{-}f{+}x$. これより, $x = n{-}(a{+}b{+}c){+}(d{+}e{+}f)$. 従って, 音楽も絵もスポーツも好きな人は $n{-}(a{+}b{+}c){+}(d{+}e{+}f)$ 人.

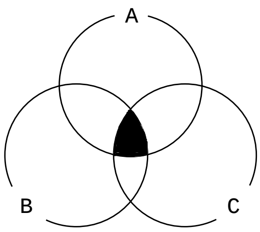

図 5: 1.6 のベン図

1.7

図 6,7 より $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$ が成立することが分かる.

1.8

二項関係は $2^{N_A \times N_B}$ 個存在し得る.

1.9

(a) 同値関係である (一つの直線は, 自分自身にも並行であると仮定した場合)

(b) 同値関係ではない (反射律, 推移律を満たさない)

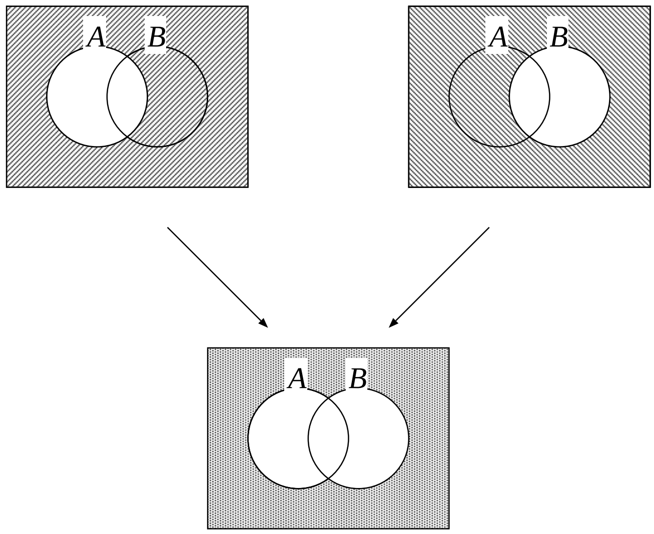

図 6: 左辺

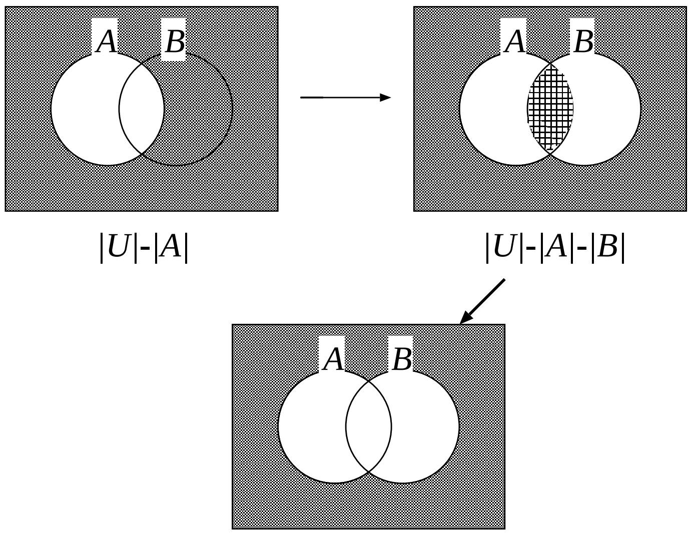

図 7: 右辺

1.10

$n_1, n_2, \ldots, n_6$ を Z 上の任意の整数とする．$n_1 + n_2 = n_1 + n_2$．従って, 反射律 $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$ が成り立つ．$n_1 + n_2 = n_2 + n_1$．従って, 対称律 $(n_1, n_2) \sim (n_2, n_1)$ が成り立つ．

$(n_1, n_2) \sim (n_3, n_4)$ かつ $(n_3, n_4) \sim (n_5, n_6)$ のとき, $n_1 + n_2 = n_3 + n_4$ かつ $n_3 + n_4 = n_5 + n_6$ が成立する．従って, $n_1 + n_2 = n_5 + n_6$ も成立する．つまり $(n_1, n_2) \sim (n_5, n_6)$ が言える．従って, 推移律が成り立つ．よって $\sim$ は同値関係である．

1.11

A に同値関係 R が定義されているとき, A は R による同値類によって直和分割されるので,

$\{[a_1,a_2,a_3,a_4]\}$, $\{[a_1,a_2],[a_3],[a_4]\}$, $\{[a_1],[a_2,a_3,a_4]\}$, $\{[a_1,a_3],[a_2],[a_4]\}$,
$\{[a_2],[a_1,a_3,a_4]\}$, $\{[a_1,a_4],[a_2],[a_3]\}$, $\{[a_3],[a_1,a_2,a_4]\}$, $\{[a_2,a_3],[a_1],[a_4]\}$,
$\{[a_4],[a_1,a_2,a_3]\}$, $\{[a_2,a_4],[a_1],[a_3]\}$, $\{[a_1,a_2],[a_3,a_4]\}$, $\{[a_3,a_4],[a_1],[a_2]\}$,
$\{[a_1,a_3],[a_2,a_4]\}$, $\{[a_1],[a_2],[a_3],[a_4]\}$, $\{[a_1,a_4],[a_2,a_3]\}$ の 15 通り存在する.

1.12

(1) $R \cup S$ は同値関係でない.
(反例): A={0,1,2,3} とする.
R={(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(0,2),(2,0),(1,3),(3,1)}
S={(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)}
としたとき, R と S は同値関係であるが,
$R \cup S = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(0,2),(2,0),(1,3),(3,1),(1,2),(2,1)\}$
は同値関係でない.
(3,1) と (1,2) が含まれているが, (3,2) が含まれていないため, 推移律が成立しない.

(2) $R \cap S$ は同値関係である.
(証明): R と S が A 上の同値関係であることから, $R \cap S$ は反射律と対称律を満たす. いま $(a,b),(b,c) \in R \cap S$ とすれば, R, S はそれぞれ同値関係であるため, $(a,c) \in R$, $(a,c) \in S$ となり, $(a,c) \in R \cap S$ となり, 推移律を満たす. よって, $R \cap S$ は同値関係である.

1.13

X の要素は d 個, Y の要素は r 個ある. このとき, 関数 $f : X \leftarrow Y$ の個数は, d 個の要素のそれぞれに, Y の要素のいずれかを対応させる規則の数であるから, r^d 個存在する.

1.14

$P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n \to R$ の個数は, $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i$ 個の要素の各々に r 個の要素の全てを対応させた時の規則数なので, $r^{\prod_{i=1}^{n} p_i}$ 個存在する.

1.15

$L = \{0,1,2\}$ 上では, 各要素に対して 3 つの割り当て方があるので, $3^3 = 27$ 個存在する. $L = \{0,1,2,3\}$ 上では, 各要素に対して 4 つの割り当て方があるので, $4^4 = 256$ 個存在する.

1.16

正の整数 i の約数の集合を $A(i)$ とする. a が b の約数のとき $a \leq_R b$ と記す. $A(120)$={1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120}. $A(120)$ の中の任意の二つの要素 a, b について反射律, 反対称律, 推移律を満たすので, $A(120)$ は順序集合である. ハッセ図を図 8 に示す.

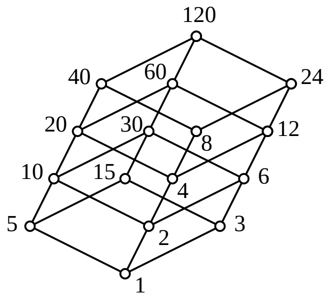

図 8: 1.16 のハッセ図

1.17
$B^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.
B^3 の要素 **a,b,c** について, $\mathbf{a} \leq \mathbf{a}$ なので反射的, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ かつ $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ ならば **a=b** となるので反対称的, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ かつ $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$ ならば $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$ となるので推移的である. よって, $\leq$ は順序関係である. したがって, $< B^3, \leq >$ は順序集合である. ハッセ図を図 9 に示す.

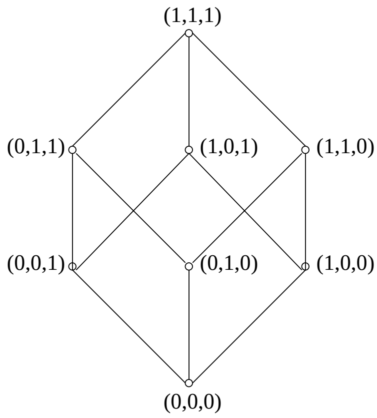

図 9: ハッセ図

1.18
図 10 に示す.

1.19
図 11 にハッセ図を示す.

1.20
$T = \{0,1,2\}$ の全ての直和分割は, $\{[0],[1],[2]\}$, $\{[0],[1,2]\}$, $\{[0,1],[2]\}$, $\{[0,2],[1]\}$, $\{[0,1,2]\}$ の 5 つ.

1.21
いずれの条件も満たさない. 以下に各条件の反例を挙げる.

(a) 反射的 cRc が含まれていないので, 反射律を満たさない. 従って反射的ではな.

(b) 対称的 cRb であるが, bRc でない. 従って対称的ではない.

(c) 反対称的 cRb であるが, bRc でない. 従って反対称的ではない.

(d) 推移的 aRc かつ cRb であるが, aRb でない. 従って推移的ではない.

(e) 半順序関係 上記の理由により反射律, 反対称律, 推移律を満たさないので半順序関係でない.

(f) 同値関係 上記の理由により反射律, 対称律, 推移律を満たさないので同値関係でない.

(g) 関数 aRa と aRc より, 要素 a に対して各要素 a, c が対応しているので関数でない.

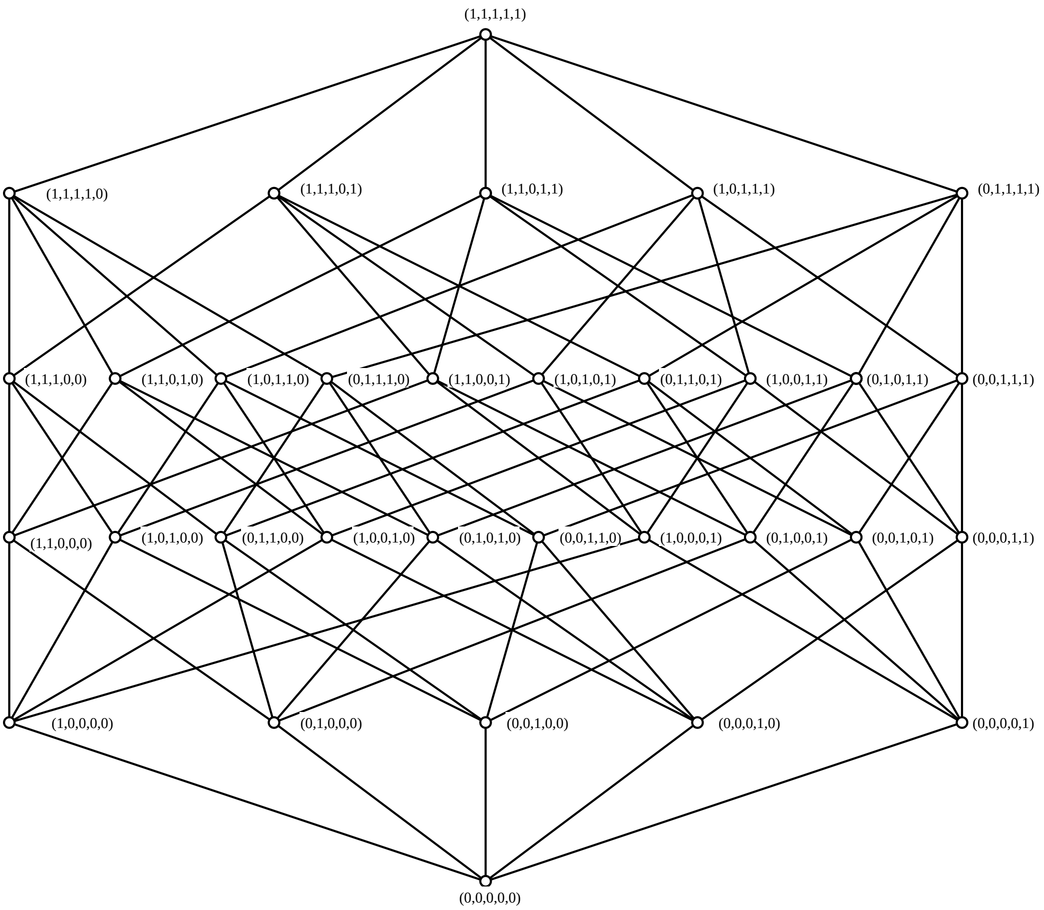

図 10: B^5 のハッセ図

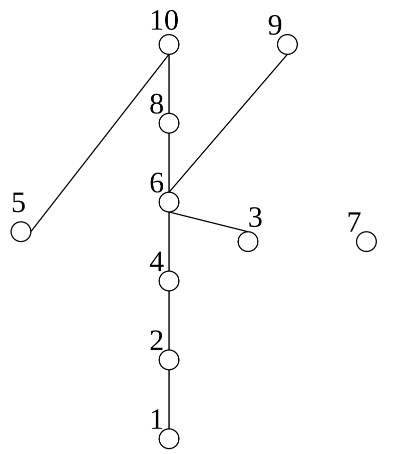

図 11:

1.22
いずれも成立しない．反例を図 12 に示す．

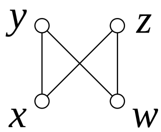

図 12: 1.22 の反例

1.23
数学的帰納法を用いる．

(1) $n = 1$ のとき

$$n^3 + 2n = 1 + 2 \cdot 1 = 3 = 3 \cdot 1$$

となり, 3 で割り切れることが分かる．

(2) $n = k(k \geq 1)$ のとき 3 で割り切れると仮定すると

$$k^3 + 2k = 3m \quad (m \text{ は自然数})$$

$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3m + 3(k^2 + k + 1) \quad (\text{仮定より}) \\ &= 3(m + k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

$(m + k^2 + k + 1)$ は定数．よって, $n = k + 1$ のときも成り立つ．

以上よりすべての非負整数 n に対して, $n^3 + 2n$ は 3 で割り切れる．

1.24
上界: $\{a, b, c\}$, 下界: $\{g, h, i\}$, 上限: $\{c\}$, 下限: $\{g\}$

1.25
関数 f に対して, $f \sim f$ なので反射的である．関数 f, g に対して, $f \sim g$ ならば $g \sim f$ なので対称的である．関数 $f, g, h(h \in F)$ に対して, N 上の有限個 (k 個) の点を除いて $f \sim g$, かつ N 上の有限個 (l 個) の点を除いて $g \sim h$ であるならば, N 上の有限個 ($k + l$ 個以下) の点を除いて $f \sim h$ となるので推移的である．よって, 関係 $\sim$ は同値関係である．