表 1: 真理値表

a	b	c	d	z
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

表 2:

x_1	x_0	y_1	y_0	z
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

表 3: 真理値表

x	y	z	w	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

3.1
表 1 に真理値表を示す.

3.2
与えられた関係を表す真理値表を表 2 に示す.

3.3
表 3 に真理値表を示す.

3.4

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) \quad = \quad & f(1,1,0,0)xy\bar{z}\bar{w} \vee f(1,0,1,0)x\bar{y}z\bar{w} \vee f(0,1,1,0)\bar{x}zyz\bar{w} \vee f(1,1,1,0)xyz\bar{w} \vee \\ & f(1,0,0,1)x\bar{y}\bar{z}w \vee f(0,1,0,1)\bar{x}yz\bar{w} \vee f(1,1,0,1)xy\bar{z}w \vee f(0,0,1,1)\bar{x}\bar{y}zw \vee \\ & f(1,0,1,1)x\bar{y}zw \vee f(0,1,1,1)\bar{x}yzw \end{aligned}$$

よって, 論理和標準形 F_1 は

$$F_1 = xy\bar{z}w \vee x\bar{z}z\bar{w} \vee \bar{x}yz\bar{w} \vee xyz\bar{w} \vee x\bar{y}\bar{z}w \vee \bar{x}y\bar{z}w \vee xy\bar{z}w \vee \bar{x}\bar{y}zw \vee x\bar{y}zw \vee \bar{x}yzw$$

論理積標準形は, $\bar{F_1}$ の論理和標準形を求め

$$F_2 = \bar{F_1} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}w \vee xyzw$$

これにド・モルガンの定理を用いて

$$\bar{F_2} = (x \vee y \vee z \vee w)(\bar{x} \vee y \vee z \vee w)(x \vee \bar{y} \vee z \vee w)(x \vee y \vee \bar{z} \vee w)(x \vee y \vee z \vee \bar{w})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{w})$$

3.5

n 変数関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ にシャノン展開を $n-1$ 回適用すると, 論理和形

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(c_2, c_3, \ldots, c_n)} f(x_1, c_2, \ldots, c_n) \cdot x_2^{c_2} x_3^{c_3} \cdots x_n^{c_n}$$

が得られる．このとき, 論理和は 2^{n-1} 個の要素に関して行う．よって, 積項数は高々2^{n-1} である．従って, 任意の n 変数論理関数は, 積項数が高々2^{n-1} の論理和形をもつ.

3.6

(1) $f = x \vee y$ を x でシャノン展開すると

$$f = x \vee \bar{x}y$$

ここで, 各積項は共通部分をもたないので $\vee$ を $\oplus$ におきかえると

$$f = x \oplus \bar{x}y$$

ここで

$$\bar{x}y = (1 \oplus x)y = y \oplus xy$$

なる関係を用いると, リード・マラー標準形は

$$f = x \oplus y \oplus xy$$

となる.

(2) 与えられた論理式を変形すると

$$g = xy(\bar{z} \vee \bar{w}) \vee zw(\bar{x} \vee \bar{y}) = xy(zw \oplus 1) \vee zw(xy \oplus 1)$$

ここで $xy(zw \oplus 1) \cdot zw(xy \oplus 1) = 0$ なので $\vee$ を $\oplus$ におきかえると

$$g = xyzw \oplus xy \oplus xyzw \oplus zw = xyzw \oplus xyzw \oplus xy \oplus zw = xy \oplus zw$$

となる.

3.7

$$\begin{aligned}
f(xyz) &= f(000)\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee f(001)\bar{x}\bar{y}z \vee f(010)\bar{x}y\bar{z} \vee f(011)\bar{x}yz \\
&\quad \vee f(100)x\bar{y}\bar{z} \vee f(101)x\bar{y}z \vee f(110)xy\bar{z} \vee f(111)xyz \\
&= x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \quad \text{(論理和標準形)} \\
\bar{f} &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \\
f &= (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \quad \text{(論理積標準形)}
\end{aligned}$$

与えられた式を変形すると

$$f = x(y \oplus z) = xy \oplus xz \quad \text{(リード・マラー標準形)}$$

3.8

(1) n が偶数のとき $(1\oplus 1)\oplus(1\oplus 1)\oplus\cdots\oplus(1\oplus 1)=(0\oplus 0)\oplus\cdots\oplus(0\oplus 0)=0.$
n が奇数のとき $(1\oplus 1)\oplus\cdots\oplus(1\oplus 1)\oplus 1=0\oplus 1=1.$

(2)

x	x	$x\oplus x$
1	1	0
0	0	0

従って $x\oplus x=0.$

(3)

x	1	$x\oplus 1$
1	1	$0=\bar{x}$
0	1	$1=\bar{x}$

従って $x\oplus 1=\bar{x}.$

(4)
$$\begin{aligned}(x\oplus y)(y\oplus z)(z\oplus x) &= (xy\oplus xz\oplus yy\oplus yz)(z\oplus x)\\ &= xyz\oplus xzz\oplus zyy\oplus yzz\oplus xxy\oplus xxz\oplus xyy\oplus xyz\\ &= xyz\oplus xyz\oplus xz\oplus xz\oplus xy\oplus xy\oplus yz\oplus yz\\ &= 0\end{aligned}$$

(5) (a) $(x\oplus y=x\oplus z)\Rightarrow(y=z)$ を証明する.
両辺に x を排他的論理和で加えると

$$\begin{aligned}x\oplus x\oplus y &= x\oplus x\oplus z\\ y &= z\end{aligned}$$

従って, $x\oplus y=x\oplus z$ ならば $y=z$ である.

(b) $(y=z)\Rightarrow(x\oplus y=x\oplus z)$ を証明する.
両辺に x を排他的論理和で加えると

$$x\oplus y=x\oplus z$$

よって上式は成り立つ.

(a), (b) より $(x\oplus y=x\oplus z)\Leftrightarrow(y=z)$ は証明された.

(6) (a) $(f=g\oplus h)\Rightarrow(g=f\oplus h)$ を証明する.
$f=g\oplus h$ のとき, 両辺に h を排他的論理和で加えると

$$\begin{aligned}f &= g\oplus h\\ f\oplus h &= g\oplus h\oplus h\\ f\oplus h &= g\end{aligned}$$

となり, 証明できた.

(b) $(g=f\oplus h)\Rightarrow(f=g\oplus h)$ を証明する.
$g=f\oplus h$ のとき, 両辺に h を排他的論理和で加えると

$$\begin{aligned}g &= f\oplus h\\ g\oplus h &= f\oplus h\oplus h\\ g\oplus h &= f\end{aligned}$$

となり, 証明できた.

よって (a), (b) より $(f=g\oplus h)\Leftrightarrow(g=f\oplus h)$ は証明された.

$$
\begin{aligned}
(7)\quad 右辺 &= (x \oplus a)(x \oplus b) = xx \oplus xa \oplus xb \oplus ab \\
&= x \oplus xa \oplus xb \oplus ab \\
左辺 &= (\bar{a} \oplus b)x \oplus ab = (a \oplus 1) \oplus bx \oplus ab \\
&= x \oplus ax \oplus bx \oplus ab
\end{aligned}
$$

従って右辺＝左辺より, 等式が成立.

$$
\begin{aligned}
(8)\quad 左辺 &= (x \vee y) \oplus (y \vee z) = (x \oplus y \oplus xy) \oplus (y \oplus z \oplus yz) \\
&= x \oplus xy \oplus y \oplus y \oplus z \oplus yz = x \oplus xy \oplus 0 \oplus z \oplus yz \\
&= x \oplus xy \oplus z \oplus yz \\
右辺 &= x\bar{y} \oplus \bar{y}z = x(y \oplus 1) \oplus (y \oplus 1)z \\
&= x \oplus xy \oplus z \oplus yz
\end{aligned}
$$

よって, 等式が成立.

$$
\begin{aligned}
(9)\quad xy \vee yz \vee zx &= (xy \oplus yz \oplus xy \cdot yz) \vee zx \\
&= (xy \oplus yz \oplus xyz) \oplus zx \oplus (xy \oplus yz \oplus xyz) \\
&= xy \oplus yz \oplus xyz \oplus zx \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \\
&= xy \oplus yz \oplus zx
\end{aligned}
$$

従って, 等式は成立.

3.9

表 4 に真理値表を示す. 真理値表より, $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ のとき, 左辺が 0 で右辺が 1 である. 従って, $x \oplus (y \vee z) \neq (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$ となる. よって反例を示すことができた.

表 4: 真理値表

x	y	z	$y \vee z$	$x \oplus (y \vee z)$	$x \oplus y$	$x \oplus z$	$(x \oplus y) \vee (x \oplus z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

3.10

$f = \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee (x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4)$ において, $x_4x_2x_3 \vee x_4x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ を分配律を用いて $x_4(x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3)$ と変形すれば, 求める F は

$$F = \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_4(x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3)$$

となる. これを実現する回路図を図 1 に示す.

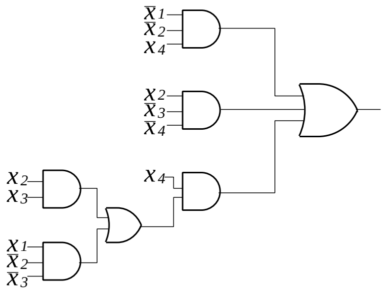

図 1: 3.10 の回路図

3.11

(a) $f = xy \oplus xz \oplus xw \oplus yz \oplus yw \oplus zw$ について $x = 0, 1$ と代入し f_0, f_1 をそれぞれ求めると

$$\begin{aligned} f_0 &= yz \oplus yw \oplus zw \\ f_1 &= y \oplus z \oplus w \oplus yz \oplus yw \oplus zw \end{aligned}$$

f_0, f_1 において $y = 0, 1$ と代入して $f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}$ を求める.

$$\begin{aligned} f_{00} &= zw \\ f_{01} &= z \oplus w \oplus zw \\ f_{10} &= z \oplus w \oplus zw = f_{01} \\ f_{11} &= 1 \oplus z \oplus w \oplus z \oplus w \oplus zw = 1 \oplus zw = \overline{zw} = \bar{f}_{00} \end{aligned}$$

次に $z = 0, 1$ と代入する.

$$\begin{aligned} f_{000} &= 0, f_{110} = 1 \\ f_{001} &= w, f_{111} = \bar{w} \\ f_{010} &= w = f_{001} \\ f_{011} &= 1 \oplus w \oplus w = 1 \end{aligned}$$

以上のことを用いて, 図 2 に示す BDD を得る.

(b) $g = x \oplus y \oplus z \oplus w$ について (a) と同様にして,

$$\begin{aligned} g_0 &= y \oplus z \oplus w \\ g_1 &= 1 \oplus y \oplus z \oplus w = \bar{g}_0 \\ g_{00} &= z \oplus w \\ g_{01} &= 1 \oplus z \oplus w = \bar{g}_{00} \\ g_{000} &= w \\ g_{001} &= 1 \oplus w = \bar{g}_{000} \end{aligned}$$

以上のことより, 図 3 に示す BDD を得る.

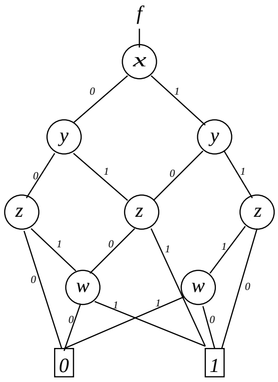

図 2:

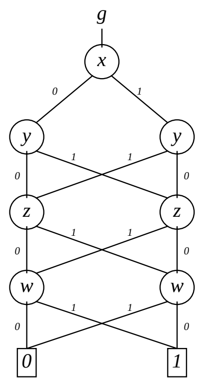

図 3:

3.12

変数を $x_1 < \cdots < x_n$ まで展開したとき, ROBDD の非終端節点は $2^n - 1$ 個存在し, 残りの変数順序を $x_{n+1} < \cdots < x_{2n}$ としたとき, $2^n - 1$ 個の非終端節点が必要であり, 0 と 1 を表す終端節点が必要である. したがって, $(2^n - 1) \times 2 + 2 = 2^{n+1}$ 個の節点が必要である.

3.13

f, g において $x = 0$ とした場合,

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= 1 \cdot H(f(|x=0), g(|x=0)) \vee 0 \cdot H(f(|x=0), g(|x=0)) \\
&= H(f(|x=0), g(|x=0)) \\
&= \text{左辺}
\end{aligned}$$

f, g において $x = 1$ とした場合,

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= 0 \cdot H(f(|x=1), g(|x=1)) \vee 1 \cdot H(f(|x=1), g(|x=1)) \\
&= H(f(|x=1), g(|x=1)) \\
&= \text{左辺}
\end{aligned}$$

以上より, 等式が成立する.

3.14

条件を満たす論理関数を f とする. 各ドアに備えているスイッチをそれぞれ, x_1, x_2, x_3, x_4 とすると

$$f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

が成立する. ここで

$$a \oplus b = \bar{a} \cdot b \vee a \cdot \bar{b}$$

という関係を用いて論理式 f を変形すれば,

$$(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4) = (\overline{x_1 \oplus x_2}) \cdot (x_3 \oplus x_4) \vee (x_1 \oplus x_2) \cdot (\overline{x_3 \oplus x_4})$$

となる. 与えられた条件を満たす配線図を図 4 に示す.

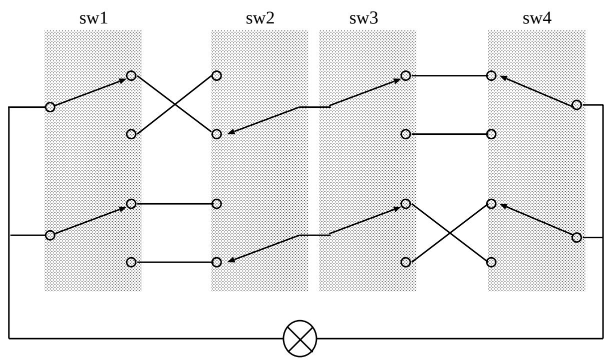

図 4: 3.14 の配線図

sw1, sw2, sw3, sw4 は各ドアに備わっているスイッチを, Lamp は電灯を表す. 図 4 の網かけ部分が上下同時に連動する.

3.15

シャノンの展開定理より,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(c_1,c_2,\ldots,c_n)} f(c_1, c_2, \ldots, c_n) x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n}$$

を得る. 各積項は互いに共通部分を持たないので,

$$\begin{aligned}
f &= \bigoplus_{(c_1,c_2,\ldots,c_n)} f(c_1, c_2, \ldots, c_n) x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n} \\
&= f(0,0,\ldots,0)\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n \oplus f(1,0,\ldots,0)x_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n \oplus f(0,1,0,\ldots,0)\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\cdots\bar{x}_n \\
&\quad \oplus\cdots\oplus f(0,0,\ldots,0,1)\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_{n-1}x_n \oplus f(1,1,0,\ldots,0)x_1x_2\bar{x}_3\cdots\bar{x}_n \\
&\quad \oplus f(1,0,1,0,\ldots,0)x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\cdots\bar{x}_n \oplus\cdots\oplus f(0,0,\ldots,0,1,1)\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_{n-2}x_{n-1}x_n \\
&\quad \oplus\cdots\oplus f(1,1,\ldots,1)x_1x_2\cdots x_n \\
&= a_0(1\oplus x_1)(1\oplus x_2)\cdots(1\oplus x_n)\oplus a_1x_1(1\oplus x_2)\cdots \\
&\quad (1\oplus x_n)\oplus a_2(1\oplus x_1)x_2(1\oplus x_3)\cdots(1\oplus x_n) \\
&\quad \oplus\cdots\oplus a_n(1\oplus x_1)(1\oplus x_2)\cdots(1\oplus x_{n-1})x_n \oplus a_{12}x_1x_2(1\oplus x_3)\cdots(1\oplus x_n) \\
&\quad \oplus a_{13}x_1(1\oplus x_2)x_3(1\oplus x_4)\cdots(1\oplus x_n)\oplus\cdots\oplus a_{n-1,n}(1\oplus x_1)(1\oplus x_2)\cdots \\
&\quad (1\oplus x_{n-2})x_{n-1}x_n \oplus\cdots\oplus a_{12\cdots n}x_1x_2\cdots x_n \\
&= a_0 \oplus (a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus\cdots\oplus a_nx_n)\oplus(a_{12}x_1x_2\oplus a_{13}x_1x_3\oplus\cdots\oplus a_{n-1,n}x_{n-1}x_n) \\
&\quad \oplus\cdots\oplus a_{12\cdots n}x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}$$

3.16

ド・モルガンの定理より

$$f = \overline{\overline{xy} \vee z} = xy \cdot \bar{z}$$

$$g = \overline{\overline{xy} \cdot u} = xy \vee \bar{u}$$

表 5:

x	y	z	$xy \cdot \bar{z} = f$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x	y	u	$xy \vee \bar{u} = g$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

したがって真理値表は表 5 の様になる.

3.17

NAND ゲートは, 入力の値が 1 つでも 0 であれば, 出力は 1 となる. また, 定数 1 の入力は削除しても出力値は変化しない. さらに, NAND ゲートは, 図 5 のように置き換えることができる.

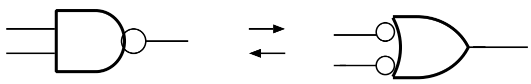

図 5: NAND ゲートの置き換え

$w = 0$ とすると, 図 6 のような回路に簡単化できる.

$$\begin{aligned} f(x,y,z,0) &= (x \vee \bar{x}y)z \vee (x \vee \bar{y})\bar{z} \\ &= xz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \\ &= x(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}yz \vee \bar{y}\bar{z} \\ &= x \vee \bar{x}yz \vee \bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

同様に, $w = 1$ とすると, 図 7 のような回路に簡単化できる.

$$f(x,y,z,1) = \bar{\bar{\bar{z}}} = \bar{z}$$

よって, 図 8 のような出力関数のカルノー図を得る.

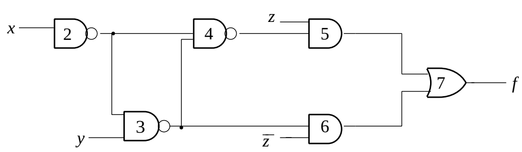

図 6: $f(x, y, z, 0)$ の回路

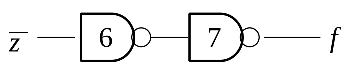

図 7: $f(x, y, z, 1)$ の回路

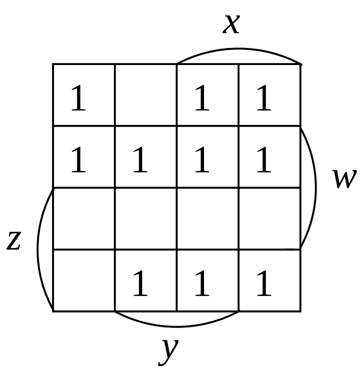

図 8: 出力関数のカルノー図

表 6:

A	B	C	D	f	A	B	C	D	f
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3.18

回路図の左半分を図 9 に示す．この部分は, 2 入力 NAND のみで構成されている．したがって, 入力の値が 1 つでも 0 ならば出力値は 1 となり, 入力の値が 1 ならば出力値は他方の入力値の否定になる．よって $A = 0$ のとき, 左半分の回路の出力値は B になる．また, $A = 1$ のとき, 出力値は $\bar{B}$ となる．つまり $A \oplus B$ を実現する．

次に, 回路図の右半分を図 10 に示す．なお, この回路では出力 f に一番近い NAND 素子を OR とインバータに置き換えている．このインバータの部分と, この入力につながっている NOT 部分を打ち消す．次に, この回路で $B = 0$ の場合と $B = 1$ の場合に分けて考える．$B = 0$ の場合, x の NAND 出力が 1 となるので $f = 1$ となる．$B = 1$ の場合, y の NAND 出力が 1 となるので $f = 1$ となる．よって, いずれの場合も $f = 1$ となる．つまり, 回路図全体の出力は必ず 1 となる．この回路図の出力関数の真理値表を表 6 に示す.

3.19

NAND ゲートでは, 入力の値が 1 つでも 0 となれば, 他の入力には無関係に, ゲートの出力は 1 となる．例えば, A=0 とすると, ゲート 1, 2, 6 の出力は 1 となり, これらのゲートは定数 1 の信号線で置き換えることができる．NAND ゲートでは, 定数 1 の入力は省略しても出力値は変化しない. さらに, 出力から数えて奇数段目にある NAND ゲートの記号を違う記号で置き換えたものを図 11 に示す．ここで, 出力段とその前の段の間の否定は打ち消されるので無視できる．したがって

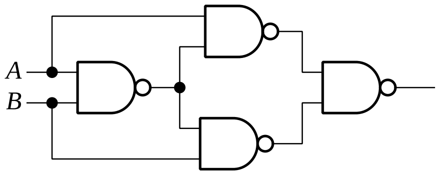

図 9: 3.18 の左半分の回路図

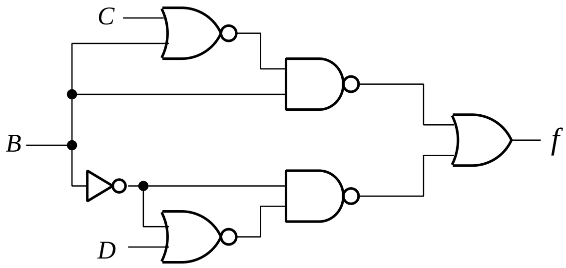

図 10: 3.18 の右半分の回路図

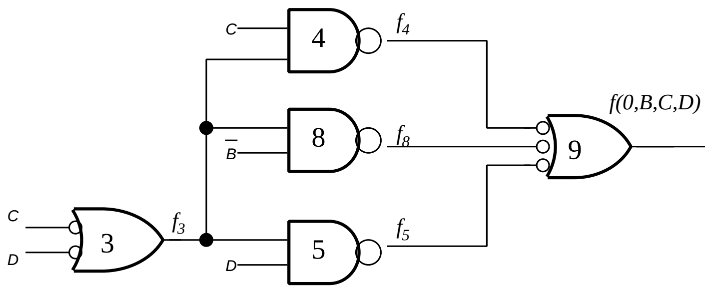

図 11:

$$
\begin{aligned}
f_3 &= \bar{C} \vee \bar{D} \\
f_4 &= Cf_3 = C(\bar{C} \vee \bar{D}) = C\bar{D} \\
f_5 &= Df_3 = D(\bar{C} \vee \bar{D}) = \bar{C}D \\
f_8 &= \bar{B}(\bar{C} \vee \bar{D}) = \bar{B}\bar{C} \vee \bar{B}\bar{D} \\
f(0, B, C, D) &= f_4 \vee f_5 \vee f_8 = C\bar{D} \vee \bar{C}D \vee \bar{B}\bar{C} \vee \bar{B}\bar{D}
\end{aligned}
$$

次に A=1 とすると, ゲート 6 の出力は 0 になり, ゲート 8 の出力は 1 になる. さらに, 奇数段目にある NAND ゲートの記号を置き換えると図 12 のようになる.

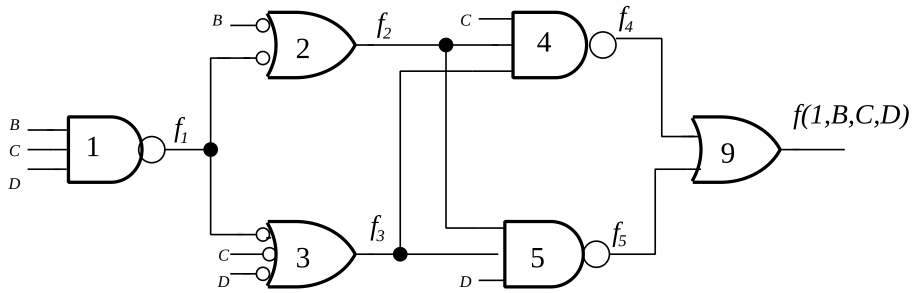

図 12:

出力段とその前の段の間の否定は打ち消されるので無視できる. 図 12 より

$$f_1 = BCD$$

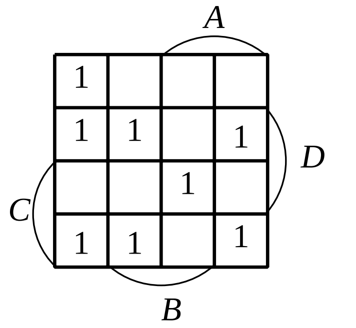

図 13:

$$
\begin{aligned}
f_2 &= \bar{B} \vee BCD \\
f_3 &= \bar{C} \vee \bar{D} \vee BCD \\
f_4 &= Cf_2f_3 \\
f_5 &= Df_2f_3 \\
f(1,B,C,D) &= Cf_2f_3 \vee Df_2f_3 = \bar{B}C\bar{D} \vee BCD \vee \bar{B}\bar{C}D
\end{aligned}
$$

以上のことよりカルノー図を作成すると図 13 のようになる.

3.20

命題を論理式で表すと

$$
\begin{aligned}
\text{飯塚で雨が降っているが博多では降っていない} &\rightarrow I \cdot \bar{H} \\
\text{飯塚あるいは小倉の少なくとも一方で雨が降っていない} &\rightarrow \bar{I} \vee \bar{K} \\
\text{飯塚と博多と小倉で雨が降っている} &\rightarrow I \cdot H \cdot K
\end{aligned}
$$

従って, これを論理式 f で表し, 吸収律を用いて変形すると

$$
\begin{aligned}
f &= I \cdot \bar{H} \vee (\bar{I} \vee \bar{K}) \vee I \cdot H \cdot K \\
&= I \cdot \bar{H} \vee \bar{I} \vee \bar{K} \vee I \cdot H \cdot K \\
&= I \cdot \bar{H} \vee \bar{I}\bar{H} \vee \bar{I} \vee \bar{K} \vee I \cdot H \cdot K \vee I \cdot H \cdot \bar{K} \\
&= \bar{H} \vee \bar{I} \vee \bar{K} \vee I \cdot H \\
&= \bar{H} \vee \bar{K} \vee \bar{I} \vee IH \\
&= \bar{H} \vee \bar{K} \vee \bar{I} \vee H \\
&= \bar{I} \vee 1 \vee \bar{K} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

したがって命題は真である.

3.21

$x\bar{y} \vee \bar{x}y = z$ を式 1 とし, $x\bar{z} \vee \bar{x}z = y$ を式 2 とする. 式 1 を式 2 の左辺に代入すると,

$$
\begin{aligned}
(\text{式 2 の左辺}) &= x\bar{z} \vee \bar{x}z \\
&= x\overline{(x\bar{y} \vee \bar{x}y)} \vee \bar{x}(x\bar{y} \vee \bar{x}y) \\
&= x(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}) \vee \bar{x}y \\
&= xy(x \vee \bar{y}) \vee \bar{x}y \\
&= (x \vee \bar{x})y \\
&= y
\end{aligned}
$$

よって, $x\bar{y} \vee \bar{x}y = z$ のとき, $x\bar{z} \vee \bar{x}z = y$ が成立する.

3.22
$x \vee y = z$ を式 1 とし, $x \vee yz = 1$ を式 2 とする. 式 1 を式 2 の左辺に代入すると

$$
\begin{aligned}
(\text{式 2 左辺}) &= x \vee yz \\
&= x \vee y(x \vee y) \\
&= x \vee xy \vee y \\
&= x \vee y
\end{aligned}
$$

ここで, 式 2 の右辺 $= 1$ であるので, $x \vee y = 1$ となり, また, 式 1 より $z = 1$ となる. ゆえに, $(x, y, z) = (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1)$ を得る.

3.23
$\bar{x} \vee xy = 0$ を式 1 とし, $xy = xz$ を式 2 とする.
式 1 より $x = 1$ が成立する.
$x = 1$ を式 1 と式 2 に代入すると,
$y = 0$ と, $y = z$ が得られる.
よって,
$(x, y, z) = (1, 0, 0)$ を得る.